

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Асроров Ф.А., Перегуда О.В., Сизов А.І., Цюкало Л.В.

ЕКОНОМЕТРІЯ
для курсантів, слухачів Військового інституту Київського
національного університету імені Тараса Шевченка за
спеціальністю
072 “Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий
ринок”

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Київ-2024

УДК 519.2

Рецензенти:

заслужений економіст України, доктор економічних наук,
професор І.Ю. Марко
(Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України)

доктор економічних наук, доцент М.Я. Ткач
(Національний університет оборони України)

Рекомендовано до друку Вченою радою Військового інституту
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол №10 від 18.04.2024 року)

АСРОРОВ Ф.А., ПЕРЕГУДА О.В., СИЗОВ А.І., ЦЮКАЛО Л.В.
Е40 ЕКОНОМЕТРІЯ. – К.: ВІКНУ, 2024. – 139 с.

Навчальний посібник “Економетрія” надає можливість оволодіти основами побудови та аналізу економетричних моделей економічних явищ та процесів. Економетричні моделі взаємозв'язків економічних процесів, досліджуваних показників дозволяють проводити економічні експерименти для виявлення можливостей зростання економіки підприємства, для пошуку курсантами, слухачами найкращих управлінських рішень, дозволяють перевіряти економічні гіпотези на предмет їх практичної реалізації.

Дана дисципліна “Економетрія” є базовою нормативною дисципліною для спеціальності 072 “Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок”. Економетрія – це наука, що дозволяє вивчити кількісні взаємозв'язки економічних об'єктів і процесів за допомогою математичних і статистичних методів та моделей. Економетрія пов'язує економічну теорію, прикладні економічні дослідження та практику. Завдяки економічній теорії здійснюється обмін інформацією між цими взаємодоповнюючими областями, відбувається взаємне збагачення і взаємний розвиток теорії і практики.

Зміст

Розділ 1: Вступ. Визначення Економетрії. Об'єкт, Предмет, Задачі Дисципліни	5
1.1. Що Таке Економетрія?.....	5
1.2. Чому Економетрія Є Окремою Дисципліною?	6
1.3. Етапи Проведення Економетричного Аналізу	7
1.4. Виникнення, Становлення Та Розвиток Економетрії.....	122
1.5. Інформаційна База Економетричних Моделей	13
1.5.1. Динамічні Ряди Та Їхні Характеристики	13
1.5.2. Варіаційні Ряди Та Їхні Характеристики.....	17
Розділ 2. Елементи Матричних Перетворень	20
2.1 Основні Відомості Про Матриці.....	20
2.2 Дії Над Матрицями	21
2.2.1. Лінійні Операції Над Матрицями.....	21
2.2.2. Добуток Матриць	24
2.2.3. Піднесення Матриць До Степеня	25
2.2.4. Транспонування Матриць.....	25
2.3 Визначники Квадратних Матриць Та Їхні Властивості	26
2.4 Обернена Матриця	30
2.5 Ранг Матриці.....	311
2.6 Системи Лінійних Рівнянь	32
Розділ 3. Методи Побудови Загальної Лінійної Моделі	36
3.1. Визначення Економетричної Моделі, Її Специфікація Та Структура	36
3.2. Лінійна Модель З Двома Змінними.....	38
3.3. Метод Найменших Квадратів	39
3.4. Специфікація Моделі	45
3.5. Передумови Застосування Методу Найменших Квадратів	47
3.6. Оператор Оцінювання Імнк.....	49
3.7. Статистичні Властивості Оцінок Параметрів Моделі За Методом Найменших Квадратів	52
3.8. Коваріаційна Матриця Оцінок Параметрів Моделі.....	54
3.9. Точкові Та Інтервальні Прогнози	57
Розділ 4. Дисперсійний Аналіз Економетричної Моделі.....	62
4.1. Побудова Та Аналіз Загальної Економетричної Моделі На Основі Покрокової Регресії.....	62
4.2. Множинний Коефіцієнт Кореляції І Детермінації.....	65
Розділ 5. Мультиколінеарність	68
5.1. Визначення Мультиколінеарності Та Її Природа	68
5.2. Наслідки Мультиколінеарності	69
5.3. Теоретичні Наслідки Мультиколінеарності	71
5.4. Практичні Наслідки Мультиколінеарності.....	73
5.5. Збільшення Спостережень.....	75
5.6. Алгоритм Фаррара-Глобера	75
5.7. Засоби Усунення Мультиколінеарності.....	81

5.8. Алгоритм Методу Головних Компонентів	82
Розділ 6. Гетероскедастичність.....	85
6.1. Визначення Гетероскедастичності Та Її Природа.....	855
6.2. Тестування Наявності Гетероскедастичності.....	91
6.3. Параметричний Тест Гольдфельда-Квандта	91
6.4. Непараметричний Тест Гольдфельда-Квандта	93
6.5. Тест Глейсера.....	94
6.6. Узагальнений Метод Найменших Квадратів.....	96
(Метод Ейткена)	96
Розділ 7. Автокореляція.....	100
7.1. Природа І Наслідки Автокореляції.....	100
7.2. Методи Визначення Автокореляції.....	102
7.2.1. Критерій Дарбіна-Уотсона	102
7.2.2. Критерій Фон Неймана	103
7.2.3. Нециклічний Коефіцієнт Автокореляції.....	103
7.2.4. Циклічний Коефіцієнт Автокореляції.....	104
7.3. Методи Оцінки Параметрів Моделі З Автокореляцією	105
7.3.1. Метод Ейткена	105
7.3.2. Метод Перетворення Вхідної Інформації.....	106
7.3.3. Метод Кочрена-Оркатта	108
7.3.4. Метод Дарбіна	109
7.4. Прогно	114
Розділ 8. Моделі Розподіленого Лага	117
8.1. Поняття Лага Та Лагових Моделей В Економіці.....	117
8.2. Оцінювання Параметрів Дистрибутивно-Лагових Моделей.....	119
8.3. Методи Оцінювання Параметрів Лагової Моделі	121
Розділ 9. Системи Одночасних Структурних Рівнянь.....	125
9.1. Системи Рівнянь При Побудові Економетричних Моделей	125
9.2. Ідентифікація Моделі. Рекурсивні Системи.....	126
9.3. Методи Оцінки Параметрів Моделі На Основі Системи Рівнянь.....	127
9.4. Прогноз Та Його Довірчі Інтервали	132

РОЗДІЛ 1: ВСТУП. ВИЗНАЧЕННЯ ЕКОНОМЕТРІЇ. ОБ'ЄКТ, ПРЕДМЕТ, ЗАДАЧІ ДИСЦИПЛІНИ

1.1. Що таке економетрія?

Економічна теорія кінця ХХ століття – це потужний інструмент дослідження, аналізу, пояснення, прогнозування динаміки економічної реальності, яка невпинно розвивається та поповнюється розмаїттям подій і явищ, що безпосередньо впливають на життя як цілих суспільств так і окремих індивідів. Без перебільшення можна сказати, що економіка з різноманітністю її підходів та засобів спостереження, методів обробки інформації та моделювання економічних систем акумулює результати багатьох дисциплін, таких як математика й інформатика, статистика і теорія імовірностей та інші. Серцевина цього утворення, що визначається терміном економічна наука, еволюціонувала так стрімко, що без спеціального путівника важко навіть охопити мережу окремих дисциплін на стовбурі дерева економіки. І цей процес триває.

Особливе місце на дереві економіки посідає економетрія. Що являє собою економетрія?

У буквальному перекладі економетрія означає «вимірювання економіки». Але, звичайно, такий переклад не відображає справжнього стану речей. Поняття економетрії є набагато ширшим, хоча вимірювання залишається однією з її складових частин.

За класичним визначенням, економетрія – це наука, що вивчає закономірності та взаємозв'язки економічних об'єктів і процесів за допомогою математико-статистичних методів та моделей.

Перше принципове питання з яким зустрічається кожен, хто вивчає економіку, – це питання про існуючі взаємозалежності між економічними змінними. Попит, який складається на ринку на деякий товар, розглядається як функція його ціни. Витрати, пов'язані з виготовленням певного продукту, передбачаються залежними від обсягу виробництва. Споживчі витрати можуть залежати від доходу.

Це все приклади парної залежності, але, для більшої реалістичності, в кожне з співвідношень приходиться вводити декілька змінних:

- попит на товар можна розглядати як функцію його ціни, доходу споживачів та цін на конкуруючі та доповнюючі товари;
- виробничі витрати будуть залежати від обсягу виробництва, його динаміки, цін на основні виробничі ресурси;
- споживчі витрати можна визначити як функцію доходів, ліквідних активів та попереднього рівня споживання.

Економетрія є інструментом, який дозволяє перейти від якісного рівня аналізу до рівня, що використовує кількісні статистичні значення досліджуваних величин.

1.2. Чому економетрія є окремою дисципліною?

Економетрія є синтезною дисципліною, вона поєднує в собі,

- економічну теорію,
- математичну економіку,
- економічну статистику,
- математичну статистику.

Що ж відрізняє економетрику від економічної теорії? Економічна теорія пропонує твердження чи гіпотези, що за своєю сутністю є переважно якісними. Наприклад, ми знаємо, що в умовах вільної конкуренції крива попиту багатьох благ падає відповідно із зростанням ціни. Винятком є блага нижчого порядку, попит на які може зростати з ростом ціни. Але сама теорія не наводить жодного кількісного виміру взаємозв'язку цих двох показників, тобто вона не показує, наскільки зросте чи зменшиться кількість у результаті зміни ціни товару. Таким чином, економічна теорія приймає без доказів залежність між ціною та попитом на товар.

Економетрія дає можливість на основі статистичної інформації кількісно визначити криві попиту та встановити про які блага йде мова; визначити кількісні оцінки коефіцієнтів еластичності попиту від ціни, доходу та інших факторів, які показують зміну попиту при малих змінах відповідних факторів. Наприклад, якщо за інших незмінних умов, ціна на м'ясо підвищиться на 1%, попит на м'ясо з ймовірністю 95% спаде на 1,39%. Для чистої теорії такі розрахунки мають велике значення для аналізу і прогноза розвитку галузі тваринництва, розміру надходжень в бюджет і т.д. В результаті економетричного аналізу видобуваються невідомі дані. Інакше кажучи, економетрика забезпечує кількісну сторону економічної теорії.

Економетрія – це прикладна галузь знань (тобто, забезпечуюча) потрібна для проведення кількісного аналізу та прогнозування економічних явищ.

Економетрія переводить економічні проблеми на мову математики, тобто будує математичну модель. А потім шукає числові значення параметрів цих моделей за статистичними даними. На відміну від чистої математичної економіки, яка виражає економічну теорію в математичній формі без мети вимірювання чи емпіричного підтвердження теорії, економетрія, навпаки, зацікавлена в емпіричному підтвердженні економічної теорії. Економетрист часто використовує математичні рівняння, запропоновані математиком-економістом, але перетворює їх у форму, найбільш придатну для емпіричного тестування. Перетворення математичних рівнянь в економетричні вимагає великої винахідливості та практичних навичок.

Економетрія – напрямок економіко-математичних методів, предмет та задачі якої пов'язані з проблемами побудови економіко-математичних моделей, розробкою методів оцінювання їх параметрів за статистичними даними та аналізом властивостей методів та моделей.

1.3. Етапи проведення економетричного аналізу

Побудова будь-якої економетричної моделі, незалежно від того, на якому рівні і для яких показників вона будується, здійснюється як послідовність певних етапів.

Етап 1. Постановка задачі.

Етап 2. Специфікація моделі, яка полягає у встановленні функції або системи функцій, що використовуються для побудови моделі з ймовірними характеристиками.

Етап 3. Формування вхідної інформації згідно з метою дослідження.

Етап 4. Оцінка параметрів моделі регресії за допомогою методу найменших квадратів.

Етап 5. Перевірка передумов виконання вимог до моделі; у разі порушення розглянутих вимог треба змінити специфікацію або застосувати інші методи оцінювання параметрів.

Етап 6. Проведення аналізу достовірності моделі та прогнозу за побудованою моделлю.

Гіпотези, які кладуться в основу вивчення кореляційної залежності, можна представити формально у вигляді моделей, які мають певну специфікацію.

Економетричними моделями вважаються системи рівнянь, які враховують стохастичний характер економічних процесів. Розглянемо приклад економетричної моделі кейнсіанської теорії споживання.

Формулювання теорії

Кейнс стверджував: "Фундаментальний психологічний закон ... полягає в тому, що особа, як правило, збільшує споживання при зростанні доходів, але не на ту ж саму величину, на яку збільшується її доход". Коротше кажучи, Кейнс вважав, що гранична схильність до споживання (MPC) є величиною зміни доходу (від 0 до 1) при зміні споживання на одиницю (скажімо, на 1 долар).

Розробка моделі

Хоча Кейнс підкреслював позитивну залежність між споживанням та доходом, він не визначив чіткого функціонального зв'язку між цими двома параметрами. Для спрощення економетрист може запропонувати таку форму кейнсіанської функції споживання:

$$y = b_0 + b_1x + \varepsilon, \quad 0 < b_1 < 1, \quad (1.1)$$

де y – витрати на споживання; x – доход; b_0, b_1 – параметри моделі; ε – випадкова величина.

Параметр b_1 (тангенс кута нахилу) дорівнює граничній схильності до споживання MPC. Геометрично модель (1.1) подана на рис.1.1.

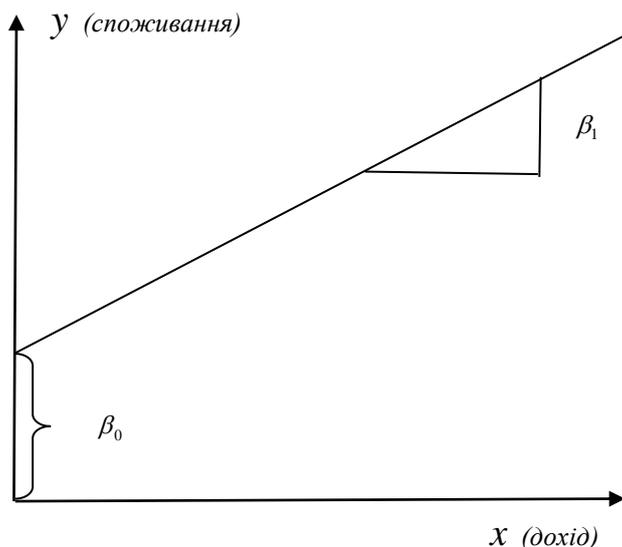


Рис. 1.1. Кейнсіанська функція споживання.

Модель (1.1), що показує лінійну залежність споживання від доходу, є прикладом економетричної моделі. Якщо модель складається лише з одного рівняння, як у попередньому прикладі, то вона називається простою, або моделлю з одним рівнянням, якщо модель містить більше одного рівняння, то ми маємо справу зі складною моделлю, або моделлю багатьох рівнянь.

Використання моделі для аналізу

Припустимо, що економіст – урядовець оцінює кейнсіанську функцію споживання і отримує такі результати:

$$\hat{y} = 5.0 + 0.7x \quad (1.2)$$

де \hat{y} – витрати на споживання; x – дохід у мільярдах гривень.

Припустимо, уряд вважає, що витрати на суму 1060 мільярдів гривень утримують безробіття на низькому рівні, скажімо, 5%. Який рівень доходу гарантуватиме саме таку кількість витрат на споживання? Припускаємо, що модель (1.2) дійсна, тоді нескладні арифметичні підрахунки покажуть:

$$1060 = 5.0 + 0.7x \quad \text{чи} \quad x = \frac{1055}{0.7} = 1507 .$$

Тобто дохід на суму 1507 мільярдів гривень при даній $MPC = 0.7$ спонукає до витрат на суму 1060 мільярдів гривень.

Як показують обчислення на найпростішому умовному рівні, досліджувана модель може використовуватись для аналізу та досягнення різних політичних цілей. Завдяки відповідній податковій чи кредитно-грошовій політиці уряд може контролювати змінну x чи маніпулювати нею, щоб створити бажаний рівень доходу y .

З цього прикладу видно, що рівняння економетричної моделі містять випадкові змінні та те, що параметри моделі визначаються статистичними методами на основі часових рядів або інших вибірових даних. Отже, у економетрії багато спільного з економічною та математичною статистиками. В той же час не можна утотожнювати економетрію з цими дисциплінами.

На відміну від робіт зі статистики, економетричний підхід проявляється не тільки в тому, що приклади та термінологія беруться з області економіки, а головним чином в тій увазі, яка приділяється відповідності обраної моделі реальному об'єкту. Економічна статистика в основному стосується збору, обробки та зображення економічних даних у формі діаграм і таблиць. У цьому полягає робота економіста-статистика. Статистичні спостереження дуже поверхньо відображають внутрішню суть явищ, їх структурні зв'язки. Наприклад, вивчення зв'язку «попит-пропозиція» на основі статистичних даних, які б вони точні не були, відтворить лише зовнішні властивості цього явища, тобто точки рівноваги. Зв'язок, який буде встановлено, не буде мати нічого спільного з структурними зв'язками через які вони виникають. Зібрані дані становлять тільки початок для роботи економетриста. Розглянемо кілька таких ситуацій.

Ситуація 1. В якийсь момент об'єм продукції складає q_0 (рис.1.2).

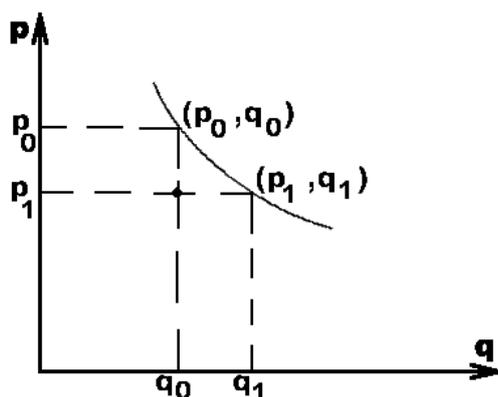


Рис.1.2.

Населення, згідно функції попиту, готове платити ціну p . Але запланована ціна p_1 . Не дивлячись на те, що попит по такій ціні стане q_1 , він буде задовільнятися лише кількістю q_0 . Звичайно, що коли попит перебільшує пропозицію, то "дефіцит" викличе більшу "спекулятивну" ціну на цей продукт. В той же час статистика видасть дані p_1 і q_0 , тобто координати неіснуючої на графіку точки, а про реальні точки p_0q_0 та p_1q_1 інформації не буде.

Ситуація 2. Тепер подивимося до чого може привести передбачення попиту на основі таких статистичних даних. Припустимо, що в послідовні інтервали часу будуть вироблятися кількості q_0, q_1, q_2 за запланованими цінами p_1, p_2, p_3 , які не залежать від дійсної функції попиту (рис.1.3).

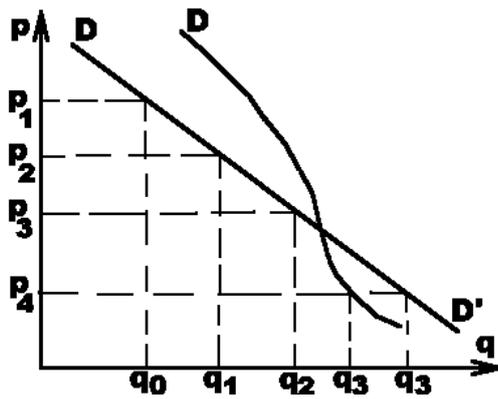


Рис.1.3.

Точки p_1q_0 , p_2q_1 , p_3q_2 знаходяться під реальною кривою попиту і звичайно товар буде проданий повністю, бо ціна на нього занижена. На основі цього статистичного ряду необачливий економетрик побудує криву попиту DD' , зображену на графіку, плановик, довіряючи економетрику, вирішить виробляти q_3 одиниць по ціні p_4 , що буде відповідати його намірам зниження собівартості виробництва. Але оскільки точка q_3p_4 лежить вище реальної кривої попиту, то продукція в кількості $q_3 - q_3'$ розпродана по такій високій ціні і залишиться в запасах за провиною економетрика.

Цей приклад показує, що при спробі перевірити ті чи інші співвідношення економічної теорії попиту та пропозиції, з самого початку ми наштовхуємося на перешкоди, пов'язані з відсутністю даних. Між відомими змінними економічної теорії і величинами, які публікуються в статистичних звітах розбіжності часто виявляються дуже великими.

На жаль існують ще й інші важливі теоретичні проблеми. Навіть в тому разі, коли статистичні дані відповідають точкам реальної кривої попиту, ми не можемо одержати інформацію, достатню для того, щоб визначити криву попиту, криву пропозиції, або обидві криві.

Наприклад, припустимо, що "Форд моторс" продасть в 1989р. 200 тис. машин "ескорт" за середньою ціною 8 тис. дол., в 1990р. - 300 тис. за ціною 8,5 тис. дол., а в 1991р. - 400 тис. за середньою ціною 9 тис. дол. Ціна та кількість змінюються в прямому співвідношенні і це дані реального ринку. Здавалось б це протиречить закону попиту. Але протиріччя нема. Вся справа в тому, що ми ігнорували припущенням "при інших незмінних умовах". За цей час (три роки) зросли прибутки населення, ціни на горюче, і тим самим виріс попит на компактну модель "ескорт". Цю ситуацію можна представити на рис.1.4.

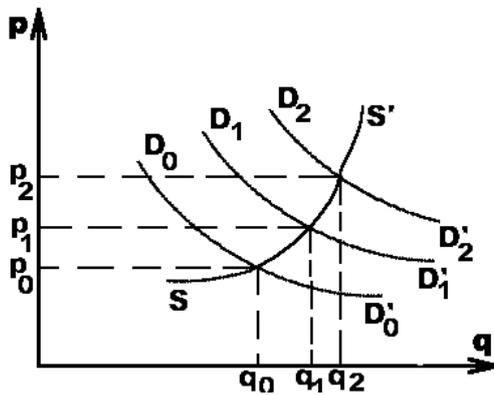


Рис.1.4.

З причини зміни нецінових факторів (прибуток, ціни на доповнюючі продукти, кількість споживачів) крива попиту пересунулася вправо, в той час, як крива пропозиції не змінилася. Очевидно, що дані статистики відповідають кривій попиту, але кожне спостереження своїй кривій. Разом з тим, якщо хтось захоче відтворити з статистики криву попиту, то він в кращому випадку одержить криву пропозиції, яка об'єднує точки статистичних спостережень. Однак можлива й більш складна ситуація, коли загальний ріст прибутків може одночасно пересувати і криву пропозиції і криву попиту в протилежних напрямках. Пошуком шляхів виходу з цих ускладнень і розробкою математичної моделі, яка б найкраще імітувала поведінку складних і невідомих нам взаємозв'язків між попитом, пропозицією, ціною та визначаючими їх факторами і займається економетрика.

Економетрія як самостійна наукова дисципліна використовує поняття та методи розв'язку задач з багатьох розділів математики, наприклад, математичної статистики, теорії імовірностей, математичного програмування, лінійної алгебри, систем нелінійних рівнянь та ін.

Але економетристи часто потребують спеціальних засобів для обробки даних, особливо отриманих в результаті неконтрольованого експерименту. Як буде показано в курсі, особливості економічної інформації не дозволяють використовувати класичні методи математичної статистики і потребують розробки нових методів визначення параметрів моделі.

Сьогодні неможливо уявити собі економетричний аналіз без використання комп'ютера. Є декілька програм, що стосуються регресії та придатні для використання на мікрокомп'ютерах. З кожним днем кількість подібних програм збільшується.

Вибір статистичного пакета для аналізу даних залежить від характеру завдань, що розглядаються, обсягу даних, які обробляються, наявного обладнання та кваліфікації користувача.

Отже вивчення економетрії потребує підготовчої бази знань: з основ економічної теорії, математики, математичної статистики та загальної теорії статистики, економічної статистики, комп'ютерів.

Економетрія поділяється на теоретичну, прикладну, кожна з яких у свою чергу ділиться на класичну, байєсівську.

Теоретична економетрика стосується розвитку методів вимірювання економічних зв'язків, визначених економетричними моделями. У цьому аспекті економетрика базується на математичній статистиці. Наприклад, одним з найбільш використовуваних засобів у економетриці є метод найменших квадратів. Завдання теоретичної економетрики - детально записати припущення цього методу, його властивості та що відбувається з цими властивостями, коли одне чи більше припущень не виконуються.

У прикладній економетриці використовуються засоби теоретичної економетрики, наприклад, для вивчення функцій продуктивності, споживання, попиту та пропозиції тощо.

Структурно можна виділити три основні частини курсу:

- методологічні основи економетричного моделювання,
- економетричні методи,
- економетричні моделі.

1.4. Виникнення, становлення та розвиток економетрії

Як самостійна дисципліна економетрія сформувалась у 20 -30 роках нашого століття завдяки працям Г.Мура та Г.Шульца. Де цього вже були відомі спроби математичної формалізації економіко-статистичних працях В.Парето (рівняння гіперболи для опису розподілу прибутку населення (1897р.)) та працях Р.Хукера й А.Чупрова з кореляційного аналізу економічних процесів. У перших працях у рамках економетрики розроблялись аналітико-статистичні моделі. Здебільшого, це були рівняння лінійної регресії з параметрами, оцінювання за методом найменших квадратів. Такі рівняння дозволяли описати як функції попиту й залежність їх від прибутків, обсягів випуску продукції, рівня цін, податків та ін., так і функції пропозиції, виробничі функції, що відображали технологічну залежність випуску продукції від затрат праці та засобів виробництва.

Одна з перших виробничих функцій була побудована Коббом та Дугласом у 1928 році, а потім узагальнена Р.Солоу. З часом регресійні моделі виявили свою обмеженість для опису узагальнених модельних економічних комплексів і нормативних моделей.

Починаючи з 30-х років відомі економісти Я.Тінберген, Л.Клейн та інші розробили моделі економіки, які описували статистичні зв'язки виробництва, кінцевого індивідуального і державного попиту, цін, податків, зовнішньої торгівлі, пропозиції робочої сили, накопичення та зношування капіталу. Такі моделі склалися вже з багатьох рівнянь, у зв'язку з чим значно ускладнилися проблеми оцінювання невідомих параметрів. А це в свою чергу привело до необхідності використання нового математичного апарату та розширило можливості практичного використання нового математичного апарату та розширило можливості практичного використання економетрики.

До числа типових економіко-математичних моделей, які на сьогоднішній день розробляє і вивчає економетрія, відносяться: виробничі функції, функції попиту різних груп споживачів та цільові функції переваги споживачів, статичні та динамічні міжгалузеві моделі виробництва, розподілу і споживання продукції, моделі загальної економічної рівноваги. Це певним чином споріднює економетрику з макроекономікою, тому не дивно, що починаючи з 50-х років вони активно розвивалися поряд.

У практичних дослідженнях економетричні методи використовуються не тільки в економіці. Вони поширені у біології, історії, соціології та інших суспільних і природничих науках, де необхідно розробляти та оцінювати моделі, які формалізують зв'язки між великою кількістю змінних.

Крім того, сучасні економетричні методи широко використовуються для порівняння ефективності різноманітних економічних гіпотез та послідовного уточнення їх.

1.5. Інформаційна база економетричних моделей

Економетрика як наука насамперед ставить собі за мету обґрунтований аналіз економічних явищ на базі математико-статистичних методів. Такий аналіз потребує наявності числових характеристик економічних явищ та можливості вимірювання їх. При вимірюванні кількісних ознак можуть бути отримані два типи рядів даних динамічні та варіаційні. Ці ряди здебільшого і становлять інформаційну базу економетричних моделей.

1.5.1. Динамічні ряди та їхні характеристики

Динамічним рядом називається послідовність спостережень за процесом або явищем у рівно віддалені проміжки часу.

Позначимо через x_i значення деякої ознаки економічного процесу або явища в i -й проміжок часу. Тоді, вимірюючи значення цієї ознаки в рівновіддалені проміжки часу, отримуємо динамічний ряд: $x_1, x_2, \dots, x_i, x_n$. Окремі значення ознаки, які відносяться до певних проміжків часу, ще називають функціями динамічного ряду. Наприклад, x_i - це значення ознаки, що вивчається у i -й проміжок часу або i -й рівень динамічного ряду.

Для того, щоб ці динамічні ряди можна було використовувати як інформаційну базу для побудови регресійних моделей, необхідно, щоб усі їхні рівні можна було порівняти. Наприклад, дані можуть стосуватися території, кордони якої з часом змінювалися. Непорівняність такого роду називається перерахунком даних із врахуванням змінених кордонів. Непорівняність може бути значною, коли показники, що розглядаються, підвладні сезонним або іншим періодичним коливанням (ціна на сільськогосподарську продукцію, тарифи

перевезень та ін.). Такі дані необхідно проаналізувати за методами сезонної декомпозиції.

Непорівняними є також дані, подані у різному масштабі виміру. Їх треба спочатку перевести в однакові одиниці.

При формуванні динамічних рядів можуть бути ускладнення, пов'язані з браком необхідних даних. Один з найбільш поширених засобів подолання цього - виявлення закономірностей, яким підпорядковується динамічний ряд, та екстраполювання або інтерполювання його недостатніх рівнів.

Після того, як динамічний ряд всебічно проаналізовано на достовірність та порівнянність даних, його можна використати як вхідну інформацію побудови моделей.

Середні характеристики динамічного ряду.

Узагальненими характеристиками динамічного ряду є середня хронологічна, середній абсолютний приріст, середній темп зростання та приросту.

Нехай ми маємо динамічний ряд з n спостережень: x_1, x_2, \dots, x_n .

Середня хронологічна показує, яким рівнем у середньому характеризується даний динамічний ряд і розраховується за формулою:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n},$$

де \bar{x} – середня хронологічна; x_i – i -й рівень динамічного ряду; n – кількість спостережень (рівнів).

Середні хронологічні корисні для порівняльного аналізу двох або кількох динамічних рядів (наприклад, порівняння середніх рівнів урожайності для різних регіонів країни, порівняння середньої заробітної плати у промисловості та в цілому по країні і т.ін.).

Характеристику зміни динамічного ряду та швидкість цієї зміни в середньому дають середній абсолютний приріст та середній темп зростання (приросту).

Середній абсолютний приріст показує, як швидко змінюється кінцевий рівень ряду відносно початкового:

$$\Delta \bar{x} = \frac{x_n - x_1}{n - 1}$$

де $\Delta \bar{x}$ – середній абсолютний приріст; x_n, x_1 – кінцевий та початковий рівень ряду.

Середній коефіцієнт зростання характеризує середню швидкість зміни економічного процесу або явища і розраховується за формулою:

$$\bar{k}_p = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}},$$

де \bar{k}_p – середній коефіцієнт зростання.

Середній коефіцієнт приросту відрізняється від середнього коефіцієнта зростання на одиницю:

$$\bar{k}_{np} = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}} - 1,$$

де \bar{k}_{np} – середній коефіцієнт приросту.

Середні коефіцієнти зростання та приросту, виражені у відсотках, називаються відповідно середнім темпом зростання (\bar{T}_p), середнім темпом приросту (\bar{T}_{np}).

Приклад 1.1. Розглянемо поквартальну заробітну плату (ЗП) у державному секторі України за 2021-2023 рр. (табл.3.1).

Таблиця 3.1.

№ п/п	Квартал	ЗП у державному секторі (без премій), млрд. - (x_i)	($x_i - \bar{x}$)	($x_i - \bar{x}$) ²
1	2021 (1)	38498	-3194.5	10204830
2	2021 (2)	41355	-337.5	113906
3	2021 (3)	42581	888.5	789432
4	2021 (4)	45780	4087.5	16707656
5	2022 (1)	41204	-488.5	238632
6	2022 (2)	38568	-3124.5	9762500
7	2022 (3)	39632	-2060.5	4245660
8	2022 (4)	41086	-606.5	367842
9	2023 (1)	38862	-2830.5	8011730
10	2023 (2)	43748	2055.5	4225080
11	2023 (3)	42293	600.5	360600
12	2023 (4)	46703	5010.5	25105110

Джерело: Тенденції української економіки //Щомісячний бюлетень/ Європейський центр макроекономічного аналізу України. – 2024.

Проведемо підрахунки за цими даними й отримаємо такі середні характеристики.

Середня квартальна заробітна плата у державному секторі України в 2021 - 2023 рр. дорівнювала:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{500310}{12} = 41692.5$$

Середній абсолютний приріст заробітної плати дорівнював:

$$\Delta \bar{x} = \frac{x_n - x_1}{n - 1} = \frac{46703 - 38498}{11} = 746$$

Середні темпи зростання та приросту відповідно становили:

$$\bar{T}_p = 11 \sqrt[11]{\frac{46703}{38498}} \times 100\% = 101.8\%$$

$$\bar{T}_{np} = \left(11 \sqrt[11]{\frac{46703}{38498}} - 1 \right) \times 100\% = 1.8\%$$

Дисперсія дорівнює: $\sigma^2 = 6677748.2$.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma = 2584$; коефіцієнт варіації $V = 6.2\%$.

Відхилення від середнього вимірює дещо штучна величина - дисперсія. Дисперсія показує середню суму квадратів відхилень членів ряду від свого середнього і позначається σ^2 , або $var(x)$:

$$var(x) = \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

де \bar{x} – середнє значення динамічного ряду; n – кількість спостережень.

У підрахунках дисперсії використовується середня сума квадратів відхилень, тому що середня сума відхилень дорівнює нулеві. Справді:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \bar{x} - \frac{n\bar{x}}{n} = 0.$$

Для того, щоб дисперсію можна було порівняти з середніми характеристиками, вводиться середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

Дисперсія цікава тим, що яким би не був розподіл величини x , як мінімум 75% спостережень знаходяться між $(\bar{x} - 2\sigma)$ та $(\bar{x} + 2\sigma)$.

Для порівнювання ступеня коливання різнорідних показників у відсотках запроваджено інший показник - коефіцієнти варіації, який розраховується за формулою:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%,$$

де V – коефіцієнт варіації; \bar{x} – середнє значення ряду; σ – середнє квадратичне відхилення.

1.5.2. Варіаційні ряди та їхні характеристики

Іншим джерелом побудови економетричних моделей служать варіаційні ряди.

Варіаційні ряди – це ряди даних, які показують кількісну міру певної ознаки у всіх об'єктів однієї сукупності, наприклад, заробітна плата у викладачів однієї кафедри, вік студентів першого курсу і т.ін.

Нехай ми маємо варіаційний ряд:

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

де x – числа, які показують зміну (варіацію) ознаки, що вивчається; i – номер варіанти $i = (\overline{1, n})$.

Приклад 1.2. При обстеженні студентів 1-го курсу за віком було зафіксовано такі дані:

17,18,18,18,18,19,20,20,20,21,21,21,17,18,18,18,19,20,20,20,21,21,21,24.

Якщо впорядкувати ці дані у зростаючому або спадному порядку, то отримаємо ранжований ряд. Числа, які показують, скільки разів (як часто) зустрічаються окремі значення варіант, називаються частотами.

Позначимо частоту i -ї варіанти x_i через n_i тоді ранжований дискретний варіаційний ряд запишеться у вигляді (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Варіаційний ряд у загальному вигляді			Варіаційний ряд для прикладу (вік студентів 1-го курсу)		
номер варіанти	значення варіанти	частота варіанти	номер варіанти	значення варіанти	частота варіанти
1	x_1	n_1	1	17	2
2	x_2	n_2	2	18	7
.	.	.	3	19	2
.	.	.	4	20	6
k	x_k	n_k	5	21	6

Розрахуємо для отриманого варіаційного ряду всі характеристики. Дані для розрахунків наведені у табл.3.3.

Таблиця 3.3

Номер варіанти	Значення варіанти x_i	Частота варіанти n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
1	17	2	-2.38	5.66	5.66
2	18	7	-1.38	1.90	7.61
3	19	2	-0.38	0.14	0.14
4	20	6	0.62	0.38	1.15
5	21	6	1.62	2.62	10.49

Середній вік студентів 1-го курсу дорівнює: $\bar{x} = 19.38$. Медіана відповідно дорівнює: $M_e = x_{20} = 20$, а мода: $M_0 = x_2 = x_5 = (21; 18)$.

Дисперсія варіаційного ряду $\sigma^2 = 1.927$, середнє квадратичне відхилення $\sigma = 1.38$, а варіація $V = 7.16$.

Для варіаційного ряду є також дві групи характеристик:
міри рівнів (середні),
міри розсіяння.

Найбільш поширеними середніми характеристиками для варіаційних рядів є середня арифметична, медіана і мода. Вони розраховуються в залежності від того, який варіаційний ряд ми маємо - дискретний чи інтервальний.

Для дискретного варіаційного ряду середня арифметична розраховується за формулою:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{\sum_{i=1}^k n_i},$$

де \bar{x} – середня арифметична; x_i – i -та варіанта; n_i – частота i -ї варіанти.

Якщо у ряді є нетипові дані, то це впливає на середню величину, яка вже не відображає середньої тенденції. У таких випадках краще використовувати медіану.

Медіаною називається таке значення ознаки, що вивчається, яке припадає на середину варіаційного ряду. При знаходженні медіани можливі два випадки: кількість членів ряду парна ($n = 2k$), непарна ($n = 2k + 1$).

У другому випадку знайти медіану дуже просто. За означенням вона дорівнює:

$$M_e = x_{k+1},$$

де M_e – медіана; x_{k+1} – значення $(k + 1)$ -го члена варіаційного ряду.

У першому випадку:

$$M_e = \frac{(x_k + x_{k+1})}{2}$$

де M_e – медіана; x_k, x_{k+1} – відповідно k та $k + 1$ варіанти.

Модою називається варіанта, яка найчастіше зустрічається в даному варіаційному ряду. Іншими словами, для дискретного ряду мода дорівнює варіанті з найбільшою частотою.

Середніх характеристик часом буває недостатньо для характеристик як варіаційного ряду, так і динамічного. Інколи два ряди можуть мати однакові середнє, медіану та моду, але по-різному можуть бути згруповані навколо середнього. Розглянемо це на дещо штучному прикладі (табл. 3.4).

Таблиця 3.4

i	n_i	x_i	$n_i x_i$	i	n_i	x_i	$n_i x_i$
1	5	99	495	1	5	1	5
2	10	100	1000	2	10	100	1000
3	5	101	505	3	5	199	995
Σ	$N = 20$	—	2000	Σ	$N = 20$	—	2000
Σ/N	1	—	100	Σ/N	1	—	100

У наведеній таблиці два варіаційні ряди мають одні й ті самі середні характеристики, але по-різному згруповані навколо середнього.

Для того щоб охарактеризувати розсіяння навколо середнього, вводиться дисперсія σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum_{i=1}^k n_i}$$

Якщо дисперсію зручно подавати в тих самих одиницях виміру, що й варіанти, то використовують середнє квадратичне відхилення σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum_{i=1}^k n_i}}$$

Для варіаційних рядів розраховується також коефіцієнт варіації V :

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$$

Коефіцієнт варіації дає змогу:

- порівняти варіацію однієї і тієї самої ознаки у різних групах об'єктів;

- виявити ступінь відмінності однієї ознаки в одній групі об'єктів за різні проміжки часу;
- порівняти варіацію різних ознак в однакових групах об'єктів.

Розділ 2. ЕЛЕМЕНТИ МАТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

2.1 Основні відомості про матриці

Поняття матриці та алгебра матриць мають дуже важливе значення для економістів: багато математичних моделей економічних об'єктів і процесів подаються в простій, а головне – компактній матричній формі.

Означення 2.1. Матрицею розміру m на n називають прямокутну таблицю $m \times n$ чисел, що складається з m рядків і n стовпців. Позначення матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

Числа a_{ij} називають *елементами матриці*, де i - номер рядка, а j - номер стовця, на перетині яких міститься елемент a_{ij} .

Матрицю, що складається лише з одного рядка, називають *матрицею-рядком* і позначають

$$(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}),$$

а матрицю лише з одним стовпцем – *матрицею-стовпцем* і позначають

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Дві матриці вважаються *рівними*, якщо в них однакові кількості рядків і стовпців, а також рівні між собою відповідні елементи.

Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю, називають *нульовою* й позначають так:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратною називають матрицю, в якій кількість рядків дорівнює кількості стовпців, тобто $m = n$. Її позначають так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Число n називають *порядком матриці*. Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратної матриці утворюють її *головну діагональ*, а елементи $B = (b_{ij}), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$ - *побічну діагональ*.

Діагональною називають квадратну матрицю, в якій всі елементи, що розміщені не на головній діагоналі, дорівнюють нулю. Її позначають так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Одиничною називають діагональну матрицю, в якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Дії над матрицями

2.2.1. Лінійні операції над матрицями

Лінійними операціями над матрицями називають операції (дії) додавання, віднімання матриць (лише однакового розміру) та множення їх на число.

Означення 2.2. Сумою (різницею) двох матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ розміру $m \times n$ називають таку матрицю $C = (c_{ij})$ розміру $m \times n$, елементи якої визначаються рівністю $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$). Позначення суми (різниці):

$$C = A + B \quad (C = A - B).$$

Приклад 2.1. Обчислимо суму й різницю матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}; \quad D = A - B = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 1 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.2. Розглянемо спрощену модель фінансової математики, яку умовно називають «портфельними інвестиціями».

У реальному житті одним із багатьох джерел фінансування є міжнародні інвестиції. Країна може одержувати й надавати міжнародні займи, приймати та інвестувати за кордон капітал. Продаж активів у будь-якій формі (права власності, цінні папери, золото тощо) означає приплив капіталу в іноземні цінні папери, які не дають інвестору права реального контролю над об'єктом інвестування. Такі інвестиції базуються переважно на приватному капіталі.

Припустимо, що інвестори можуть вкладати гроші в активи: в облігації (які дають точний фіксований прибуток), акції (які дають прибуток, що може змінюватися), в землю. Нехай після виборів у даній країні до влади може прийти одна з двох політичних партій X_1 або X_2 . Зрозуміло, що доход від капіталовкладень залежатиме від державного устрою країни. Так, уряд партії X_1 може збільшити ціну на землю й зменшити ціну акцій, а уряд партії X_2 - навпаки. Наприклад, маємо таблицю:

Активи	Партія X_1	Партія X_2
Земля	1,25	0,95
Облігації	1,05	1,05
Акції	0,90	1,15

Дану таблицю можна записати як матрицю $R = (r_{ij})$, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$ розміру 3×2 , що визначає доход від кожного активу:

$$R = \begin{pmatrix} 1,25 & 0,95 \\ 1,05 & 1,05 \\ 0,90 & 1,15 \end{pmatrix}.$$

Нехай інвестори вирішили вкласти \$50 000 у землю, \$100 000- в облігації і \$40 000- в акції. Тоді дістанемо матрицю-рядок розміру 1×3 : $P = (50\ 000\ 100\ 000\ 40\ 000)$, яка характеризує портфельні інвестиції.

Добутком матриць PR буде матриця розміру 1×2 , яка характеризує можливі вартості портфельних інвестицій, якщо на виборах переможе партія X_1 чи X_2 . Отже,

$$PR = (50\ 000\ 100\ 000\ 40\ 000) \begin{pmatrix} 1,25 & 0,95 \\ 1,05 & 1,05 \\ 0,90 & 1,15 \end{pmatrix} = (109\ 000\ 104\ 000).$$

Можно зробити висновок: якщо на виборах переможе партія X_1 , то вартість портфеля становитиме \$10 900, а якщо партія X_2 - то \$10 400.

У загальному випадкові, якщо розглядати m активів і n партій у країні, то добуток матриці $P = (p_1 p_2 \dots p_m)$ розміру $1 \times m$, яка характеризує портфель інвестицій, на матрицю прибутків від кожного активу $R = (r_{ij}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$, виражає доход на портфель P . Це буде матриця PR розміру $1 \times n$, j -та компонента якої характеризує вартість портфеля P , якщо до влади прийде партія $X_j, j = 1, 2, \dots, n$.

Означення 2.3. Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на дійсне число α називають матрицю $B = (b_{ij})$, елементи якої визначаються рівністю $b_{ij} = \alpha a_{ij}$. Це записують так: $B = A\alpha$ або $B = \alpha A$.

Матрицю $(-1)A$ називають протилежною матриці A й позначають $-A$.

В л а с т и в о с т і л і н і й н и х о п е р а ц і й н а д м а т р и ц я м и

1. $A + B = B + A$.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. $A + 0 = A$.
4. $A + (-A) = 0$.
5. $1 \cdot A = A$.
6. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

2.2.2. Добуток матриць

Дія множення вводиться лише для узгоджених матриць. Матрицю A називають **узгодженою з матрицею B** , якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B .

Нехай матриця $A = (a_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, тобто має розмір $m \times n$, а матриця $B = (b_{ij}), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}$, тобто має розмір $n \times p$.

Означення 2.4. Добутком матриці A на матрицю B називають матрицю $C = (c_{ij})$, елементи якої визначаються рівністю

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Отже, щоб дістати елемент c_{ij} матриці C , треба знайти суму добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B . Очевидно, що матриця $C = AB$ матиме при цьому m рядків і p стовпців.

Приклад 2.3. Обчислимо добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Дістаємо

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

Зауваження 2.1. У загальному випадкові $AB \neq BA$, тобто множення матриць – операція некомутативна. Так, у прикладі 1.3 маємо

$$BA = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix} \neq AB.$$

Якщо $AB = BA$, то матриці A та B називають **комутативними**.

Властивості операції множення матриць

1. $AE = EA = A$.
2. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$.
3. $(AB)C = A(BC)$.
4. $A(B + C) = AB + AC$.
5. $(A + B)C = AC + BC$.
6. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

2.2.3. Піднесення матриць до степеня

Операція піднесення до степеня визначена тільки для квадратних матриць.

Означення 2.5. Цілим додатним степенем A^n ($n > 1$) квадратної матриці A називають добуток n матриць, рівних A , тобто

$$A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n \text{ разів}}.$$

За означенням $A^0 = E$, $A^1 = A$. Легко показати, що $A^n A^m = A^{n+m}$, $(A^n)^m = A^{nm}$.

Зазначимо, що з рівності $A^n = 0$ не випливає, що A - нульова матриця.

Приклад 2.4. Знайдемо A^2 , де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Маємо

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

2.2.4. Транспонування матриць

Для кожної матриці $A = (a_{ij})$ розміру $m \times n$ можна побудувати матрицю $A^T = (a_{ij}^T)$ розміру $n \times m$ елементи якої визначаються рівністю $a_{ij}^T = a_{ji}$. Матрицю A^T називають *транспонованою до матриці* A . Її можна дістати, якщо в матриці A рядки й стовпці поміняти місцями:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Властивості операції транспонування матриць

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

2.3 Визначники квадратних матриць та їхні властивості

Розглянемо квадратну матрицю A n -го порядку. Поняття визначника цієї матриці введемо індуктивно за порядком матриці. Визначник квадратної матриці n -го порядку позначатимемо так:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Означення 2.6. *Визначником квадратної матриці n -го порядку* називають числову функцію $\det A$, значення якої знаходять таким чином:

- при $n=1$ матриця $A = (a_{11})$. Вважатимемо **визначником матриці першого порядку** число $\det A = a_{11}$;
- при $n > 1$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \dots + (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1}M_{i1}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$ - елементи першого стовпця матриці A ; M_{i1} - визначник матриці $(n-1)$ -го порядку, яку дістають із матриці A вилученням її i -го рядка й першого стовпця (**мінор елемента a_{i1}**).

Сформульоване означення дає змогу відразу обчислити **визначник матриці другого порядку**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$M_{11} = \det(a_{22}) = a_{22}, \quad M_{21} = \det(a_{12}) = a_{12}.$$

Отже,

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (2.2)$$

Обчислимо визначник матриці третього порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

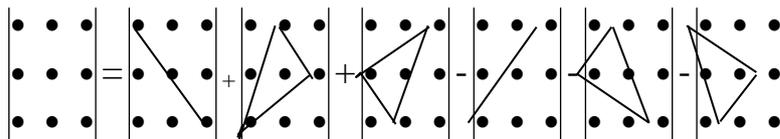
Маємо

$$M_{11} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad M_{21} = \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad M_{31} = \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}). \quad (2.3)$$

Зауваження 1.2. Кожний доданок алгебричної суми в останній формулі є добутком елементів матриці, взятих лише по одному з кожного рядка й кожного стовпця. Цей добуток входить із відповідним знаком. Для запам'ятовування знака добутку корисно знати *правило трикутників*, схематично зображене на рис. 1.1.



На практиці для обчислення визначників вищих порядків використовують інші формули.

Розглянемо визначник матриці n -го порядку. Виділимо в ньому елемент a_{ij} .

Означення 2.7. *Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці n -го порядку називають визначник матриці $(n-1)$ -го порядку, добутої з матриці A вилученням її i -го рядка та j -го стовпця.*

Наприклад, мінором елемента a_{23} матриці A третього порядку буде

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Означення 2.8. Алгебричним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці n -го порядку називають його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad (2.4)$$

тобто алгебричне доповнення збігається з мінором, якщо сума номерів рядка й стовпця $(i + j)$ - парне число, й відрізняється від мінора знаком, якщо $(i + j)$ - непарне число.

Наприклад, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$; $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = -M_{31}$.

Теорема 2.1 Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебричні доповнення:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (2.5)$$

(розклад визначника за елементами i -го рядка; $i = \overline{1, n}$);

Основні властивості визначників

1. У разі транспонування матриці її визначник не змінюється.
2. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то й визначник дорівнює нулю.
3. У разі переставлення двох рядків (стовпців) визначник змінює знак на протилежний.
4. Спільний множник усіх елементів деякого рядка (стовпця) визначника можна виносити за знак визначника.
5. Визначник, який має два пропорційних рядки (стовпці), дорівнює нулю.
6. Якщо i -й рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i -го рядка (стовпця) матриці A та i -го рядка (стовпця) матриці B , а всі інші рядки (стовпці) матриць A, B, C відповідно дорівнюють один одному, то

$$\det C = \det A + \det B.$$

7. Визначник не зміниться, якщо до елементів його одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на довільне число.
8. Визначник добутку матриць дорівнює добуткові визначників цих матриць.
9. Сума добутків елементів будь-якого рядка визначника на алгебричні доповнення відповідних елементів іншого рядка дорівнює нулю.

Наведені властивості часто використовують для обчислення визначників.

Приклад.2.6. Обчислимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

трьома способами: 1. за правилом трикутників; 2. за формулою розкладу визначника за елементами першого рядка; 3. використовуючи властивості визначника.

1. За правилом трикутників дістаємо

$$\Delta = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 3 - (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -12.$$

2. За формулою розкладу визначника за елементами першого рядка

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-2) + 2(-2) + 1(-2) = -12.$$

3. Обчислимо визначник, використовуючи його властивості. Переставимо місцями перший і третій рядкі й, винісши з останнього спільний множник, матимемо

$$\Delta = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі, помноживши перший рядок на 2 й додавши до другого, а потім, помноживши перший рядок на (-3) й додавши до третього, дістанемо

$$\Delta = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Нарешті, помноживши другий рядок на 2 й додавши до третього, маємо як визначник верхньої трикутної матриці.

$$\Delta = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12.$$

Зауваження 1.3. Саме третій спосіб широко використовується для спрощення обчислень визначників матриць порядку $n \geq 3$.

2.4 Обернена матриця

Означення 2.9. *Оберненою матрицею до квадратної матриці A називають таку матрицю A^{-1} , для якої $AA^{-1} = A^{-1}A = E$:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ - алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} ; Δ - визначник матриці A .

Означення 2.10. *Квадратну матрицю називають невиродженою, або неособливою, якщо її визначник не дорівнює нулю ($\det A \neq 0$); в протилежному разі ($\det A = 0$) матрицю називають виродженою, або особливою.*

Не кожна квадратна матриця має обернену.

Теорема 2.2. (необхідна й достатня умова існування оберненої матриці) Обернена матриця A^{-1} існує й єдина тоді й лише тоді, коли матриця A невироджена.

Приклад 2.7. Знайдемо матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Спочатку обчислимо визначник цієї матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то матриця A - невироджена й для неї існує єдина обернена матриця A^{-1} . Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів визначника:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8, & A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Дістаємо

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи справді матриця A^{-1} є оберненою до матриці A . Знайдемо AA^{-1} або $A^{-1}A$; у результаті має бути одинична матриця E . Отже, перевіряється рівність $AA^{-1} = A^{-1}A = E$:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4-8+5 & -2+5-3 & 0+1-1 \\ 6-16+10 & -3+10-6 & 0+2-2 \\ 2+8-10 & -1-5+6 & 0-1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Властивості невироджених матриць

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

2.5 Ранг матриці

Означення 2.11. Рангом матриці A називають найвищий порядок ненульових мінорів цієї матриці й позначають так: $\text{rang } A$, або $r(A)$.

Зазначимо:

- для рангу матриці A розміру $m \times n$ виконується співвідношення $r(A) \leq \min(m, n)$;
- $r(A) = 0$ тоді й лише тоді, коли всі елементи матриці дорівнюють нулю;
- для квадратної матриці n -го порядку $r(A) = n$ тоді й лише тоді, коли матриця A невироджена.

Теорема 2.3. Унаслідок елементарних перетворень матриці її ранг не змінюється.

Для рангу матриці справедливі такі співвідношення:

1. $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$;
2. $r(A + B) \geq |r(A) - r(B)|$;
3. $r(A^T A) = r(A)$;

Числа a_{ij} називають коефіцієнтами при змінних (невідомих) x_j ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$); а числа b_i - вільними членами системи (2.7).

Лінійну систему називають *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю. Якщо ж серед вільних членів є ненульові, то лінійну систему називають *неоднорідною*.

Означення 2.12. Розв'язком системи лінійних рівнянь (2.7) називають упорядковану сукупність чисел (c_1, c_2, \dots, c_n) , підставлення яких замість відповідних невідомих x_1, x_2, \dots, x_n перетворює кожне з рівнянь системи (2.7) на тотожність.

Означення 2.13. Систему (2.7) називають сумісною, якщо вона має принаймні один розв'язок. Якщо система (2.7) не має розв'язків, то її називають несумісною. Сумісну систему, яка має тільки один розв'язок, називають визначеною. Якщо сумісна система має нескінченну кількість розв'язків, її називають невизначеною.

Система лінійних рівнянь у матричному вигляді при $m = n$ записується у вигляді:

$$AX = B, \quad (2.8)$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Приклад 2.9. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Запишемо основну A й розширену $(A|b)$ матриці системи:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

Їхні ранги $r = 2$, $r' = 3$ відповідно. Отже, система несумісна.

Приклад 2.10. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

Ця система сумісна, оскільки $r = r' = 2$, причому ранг матриці менший від числа невідомих. Отже, система має безліч розв'язків. Мінор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, тому обмежимося лише першими двома рівняннями, а x_3, x_4 і x_5 візьмемо за вільні невідомі. Перенесемо вільні невідомі в праві частини перших двох рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 - x_3 - x_4 - x_5, \\ 3x_1 + 2x_2 = -2 - x_3 - x_4 + 3x_5. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, дістанемо

$$x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5, \quad x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5,$$

де x_3, x_4, x_5 набувають довільних значень.

Отже, дана система має розв'язки

$$(-16 + x_3 + x_4 + 5x_5; 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5; x_3; x_4; x_5),$$

де x_3, x_4, x_5 - довільні числа.

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Що називають матрицею?
2. Як визначають розмір матриці?
3. Яка матриця називається квадратною? прямокутною?
4. Яку матрицю називають матрицею-стовпцем? Матрицею-рядком?
5. Яка матриця називається діагональною? одиничною?
6. Як отримати транспоновану матрицю?
7. Який порядок додавання та віднімання матриць одного порядку?
8. Коли можна помножити одну матрицю на іншу? Який порядок помноження матриць?
9. Яка характеристика матриці називається рангом?
10. Що називається визначником квадратної матриці?
11. Як визначаються алгебраїчні доповнення елемента матриці та як вони розкриваються?
12. Що називають мінором матриці і чим він відрізняється від алгебраїчного доповнення?
13. Яка матриця називається невиродженою?

14. Який порядок складання оберненої матриці?

15. Яка система рівнянь називається лінійною? нелінійною? однорідною?

16. Задані матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть матриці суми (різниці): $A \pm D$; $C \pm K$; $B \pm F$; $A \pm E$.

Поясніть, чому не існує суми (різниці) матриць: $A \pm B$; $B \pm C$; $C \pm D$; $D \pm K$; $E \pm K$.

17. Для матриць із завдання 1 знайдіть добутки: BA ; CF ; CK ; AE ; DE .

Поясніть, чому не існує добутків AB ; CD ; FC ; FB ; KA ; KE .

18. Для матриць завдання 1 знайдіть транспоновані до них матриці.

19. Наведіть основні властивості оберненої матриці.

20. Задано матрицю A^{-1} , обернену до матриці A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \\ -5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Покажіть, що $(A^{-1})^{-1} = A$; $A^{-1}A = E$; $|E| = |A^{-1}||A|$; $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

21. Задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Матриця, обернена до матриці системи,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \\ -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть розв'язок даної системи рівнянь.

Розділ 3. МЕТОДИ ПОБУДОВИ ЗАГАЛЬНОЇ ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ

3.1. Визначення економетричної моделі, її специфікація та структура

Одною з головних задач економетрії в *ринковій економіці* є ретельне вивчення кількісних зв'язків між показниками для кращого розуміння господарських явищ і процесів, що в свою чергу дозволяє більш обґрунтовано сформулювати управлінські рішення та дати прогнози на майбутнє. Для вирішення цієї задачі потрібна побудова економетричної моделі.

У розглядаємому розділі зосередимо увагу на побудові загальної лінійної моделі.

Модель, що описує кореляційно-регресивний зв'язок між економічними показниками називається **загальною**, яка дійсна для всієї генеральної сукупності спостережень. У лінійній економетричній моделі має місце лінійний зв'язок між змінними, що характеризують розглядаємий економічний процес чи явище. Зауважимо, що лінійні регресійні моделі є найбільш прості і в переважній більшості випадків – достатні для практики.

Економетрична модель – це функція чи система функцій, що описує кореляційно-регресійний зв'язок між економічними показниками, один чи кілька з яких є залежною змінною, інші – незалежними.

У загальному матричному вигляді економетрична модель для **фактичних** даних записується так:

$$Y = AX + u, \quad (3.1)$$

де A - матриця параметрів моделі розміром $m \times n$ (m - кількість незалежних змінних, n - число спостережень); Y – матриця значень залежної змінної; X – матриця незалежних змінних; u - матриця випадкової складової.

Незалежні фактичні змінні X (пояснювальні змінні) найчастіше бувають детермінованими і вони є наперед заданими змінними, або вхідними показниками для розглядаємої економічної системи.

Випадкові складові u називають ще *стохастичними складовими*, *помилками* або частіше *залишками*. Вони є наслідками помилок спостережень, містять у собі вплив усіх випадкових факторів, а також факторів, які не входять у модель.

З огляду того, що **залежні фактичні змінні** Y (пояснювані змінні), які є *результативними показниками*, залежать від випадкової складової u , то вони також є стохастичними (випадковими). Звідси і економетрична модель є *стохастичною*.

Економічний аналіз поєднує широке коло задач, пов'язаних з побудовою функціональних залежностей між двома групами числових змінних: x_1, x_2, \dots, x_k та y_1, y_2, \dots, y_m , або залежності між двома багатомірними змінними X та Y , де Y – зветься відгуком, або залежною змінною, X – фактором, або незалежною змінною.

Статистичний підхід до задачі визначення функціональної залежності між X та Y будується на експериментальних даних (x_i, y_i) , де y_i – значення залежної змінної при заданому значенні незалежної змінної x_i .

Пару значень (x_i, y_i) називають результатом одного спостереження, n – кількістю спостережень ($i = \overline{1, n}$).

Ми припускаємо, що значення спостережень залежної змінної Y можна розділити на дві частини: одна з них закономірно залежить від X , тобто є функцією від X ; друга частина – випадкова по відношенню до X .

Позначимо першу через $f(X)$, другу через u і представимо відгук у вигляді

$$Y = f(X) + u \quad (3.2)$$

де u – деяка випадкова величина, яка є виразом або внутрішньої властивої відгуку мінливості, або впливу на нього факторів, не врахованих записаним співвідношенням.

Така залежність називається кореляційною і треба, щоб кореляцію, яка спостерігається для однієї обмеженої вибірки (тобто n спостережень), можна було розглядати як доказ існування залежності в загальному випадку.

Нагадаємо, що *кореляційною залежністю* (кореляцією) двох випадкових величин називається така їх ймовірнісна залежність, коли математичне сподівання однієї з них функціонально залежить від значення, прийнятого іншою випадковою величиною. Математичне сподівання випадкової величини Y за умов, що випадкова величина X прийняла певне значення x , називається *умовним математичним сподіванням* і позначається $M(Y/x)$. Кореляція – латинське слово, що означає “відповідність”. Очевидно, випадкові величини можуть бути імовірно залежними, але не корельованими, якщо закон розподілу однієї з них залежить від значення, прийнятого іншою, а математичне сподівання – ні. У цьому випадку змінення закону розподілу при постійному математичному сподіванні може відбуватися, наприклад, в результаті змінення середнього квадратичного відхилення. Отже, з імовірносної залежності випадкових величин не обов’язково виходить кореляційний зв’язок між ними.

Рівняння

$$M(Y/x) = f(x),$$

яке виражає залежність математичного сподівання випадкової величини Y від X , де $f(x)$ – будь-яка функція від X , називається *рівнянням регресії Y по X* , а графік цієї функції – *лінією регресії*.

Якщо $f(x)$ – лінійна функція, то регресія лінійна, а лінія регресії – пряма.

3.2. Лінійна модель з двома змінними

У загальному випадку парна лінійна регресія є лінійною функцією між залежною змінною Y і однією пояснюючою змінною X :

$$Y = a_0 + a_1 X. \quad (3.3)$$

де a_0 і a_1 - параметри регресії.

Нехай вектор змінної Y описує витрати на споживання, а вектор X – величину доходу сім'ї. Очевидно, що для окремих груп сімей існує певна залежність між споживчими витратами і доходом сім'ї. Наприклад, ця залежність досліджується на основі лінійної функції:

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X \quad (3.4)$$

Проте на розмір споживчих витрат крім доходу можуть впливати інші фактори, частина яких є випадковими. Ці фактори й зумовлюють відхилення фактичних витрат на споживання від обчислених за (3.4).

Наблизити обчислені значення до фактичних формально можна введенням до моделі стохастичної складової:

$$Y = a_0 + a_1 X + u, \quad (3.5)$$

У моделі (3.5) символом u позначено змінну, яка може набувати додатних та від'ємних значень, оскільки вона вимірює відхилення витрат на споживання кожної окремої сім'ї від обчисленого значення згідно з (3.3).

Зауважимо, що в моделі (3.5) a_0 і a_1 – оцінювані параметри, а в моделі (3.4) \hat{a}_0 і \hat{a}_1 – їх оцінки.

Можливе співвідношення між цими рівняннями регресії схематично зображено на рис.3.1.

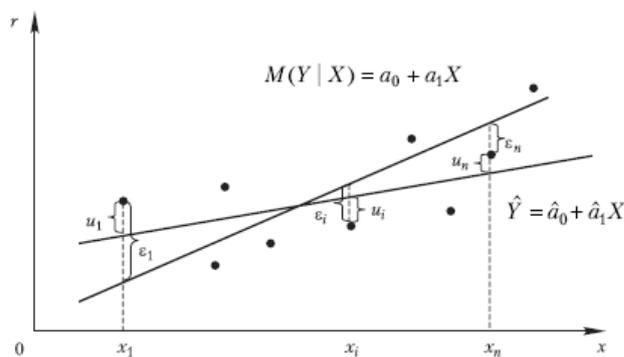


Рис.3.1.

Задачі лінійного регресійного аналізу полягають у тому, щоб за наявними статистичними даними $(x_i, y_i), i = \overline{1, n}$, для змінних X і Y :

- а) отримати найкращі оцінки \hat{a}_0, \hat{a}_1 невідомих параметрів a_0 і a_1 ;
- б) перевірити статистичні гіпотези про параметри моделі;
- в) перевірити, чи досить добре модель узгоджується зі статистичними даними (адекватність моделі даним спостережень).

Для відображення того факту, що кожне індивідуальне значення y_i відхиляється від відповідного умовного математичного сподівання, у модель вводять випадковий доданок u_i :

$$y_i = M(Y|X = x_i) + u_i = a_0 + a_1x_i + u_i.$$

Отже, індивідуальні значення y_i подають у вигляді суми двох компонент – систематичної ($a_0 + a_1x_i$) і випадкової (u_i).

Таким чином, регресійне рівняння набуває вигляду

$$Y = a_0 + a_1X + u.$$

Завдання полягає в тому, щоб за конкретною вибіркою $(x_i, y_i), i = \overline{1, n}$, знайти такі значення оцінок невідомих параметрів a_0 і a_1 , щоб побудована лінія регресії була найкращою в певному розумінні серед усіх інших прямих. Іншими словами, побудована пряма має бути "найближчою" до точок спостережень за їх сукупністю.

Стохастичну складову u економетричної моделі називають помилкою (залишком, збуренням, відхиленням).

Введення до моделі (3.5) стохастичної складової має три підстави, кожна з яких не виключає решти двох.

Величину витрат на споживання визначає не лише рівень доходів, а й інші об'єктивні чинники, наприклад розмір сім'ї, середній вік тощо;

На величину споживання впливають випадкові фактори, наприклад схильність до ощадливості, стриманість чи навпаки – надмірність у витратах і т.ін.;

Частина факторів, які впливають на величину споживчих витрат, не оцінюються кількісно, вони не квантифікуються. Крім того, можливі помилки вимірювання змінних.

Отже, замість залежності $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, де k – досить велике, розглядається модель з невеликим числом незалежних чинників, причому Y відіграє роль функції від найважливіших $X_j (j = \overline{1, k})$, тоді як чистий сумарний ефект від впливу всіх інших чинників відбиває u . У крайньому разі, якщо лишається одна незалежна змінна, маємо найпростішу економетричну модель з двома змінними, як (3.5).

3.3. Метод найменших квадратів

Звернемося до прикладу простої економетричної моделі, де потрібно кількісно оцінити зв'язок між витратами на споживання та доходами сім'ї. Припустимо, що економетрична модель споживання будується для тієї групи людей, в якій зі збільшенням доходів зростають витрати на споживання, тобто модель має вигляд

$$Y = a_0 + a_1X + u$$

Щоб оцінити параметри моделі необхідно сформувати вхідну, сукупність спостережень, кожна одиниця якої характеризуватиметься витратами на споживання і доходами сімей.

Нехай за вибіркою $(x_i, y_i), i = \overline{1, n}$, потрібно визначити оцінки \hat{a}_0 і \hat{a}_1 рівняння регресії

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X$$

тобто підібрати такі значення \hat{a}_0 і \hat{a}_1 для яких сума квадратів відхилень $\sum_{i=1}^n u_i^2$ була мінімальною (рис.3.2.).

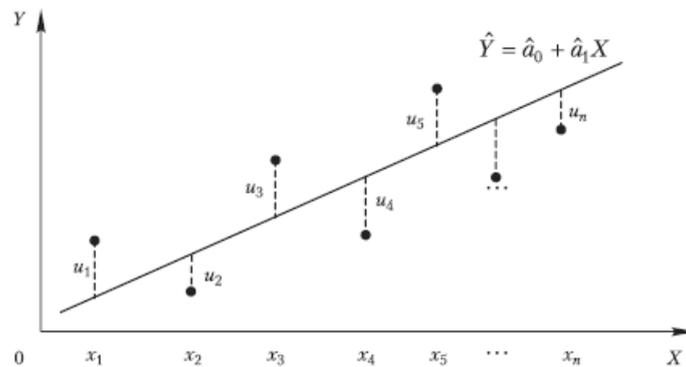


Рис. 3.2.

Не доцільно знаходити параметри економетричної моделі, мінімізуючи суму лінійних відхилень фактичних витрат на споживання від розрахункових, бо вона може дорівнювати нулю, якщо сума від'ємних і додатних відхилень буде однаковою. Тому мінімізації підлягає сума квадратів відхилень, і величина її залежатиме безпосередньо від розсіювання точок навколо лінії регресії, а саме:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n u_i^2 \right\} = f(\hat{a}_0, \hat{a}_1).$$

Принцип найменших квадратів відхилень полягає в знаходженні таких \hat{a}_0 і \hat{a}_1 для яких $\sum_{i=1}^n u_i^2$ найменша. Необхідна умова для цього – перетворення на нуль похідних цієї функції за кожним із параметрів \hat{a}_0 і \hat{a}_1 . Метод, який реалізує принцип найменших квадратів, називається методом найменших квадратів (МНК). Оскільки

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i)^2,$$

то

$$\begin{cases} \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i) = 0; \\ \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i) = 0. \end{cases}$$

Виконавши елементарні перетворення, дістанемо систему нормальних рівнянь

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i; \\ \hat{a}_0 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases} \quad (3.6.)$$

розв'язком якої є оцінки параметрів \hat{a}_0 і \hat{a}_1 .

Оскільки оцінки найменших квадратів такі, що лінія регресії обов'язково проходить через точку середніх значень (\bar{x}, \bar{y}) , то оцінку цих параметрів моделі можна дістати так:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}; & \hat{a}_0 &= \bar{Y} - \hat{a}_1 \bar{X}; \\ y_i &= Y_i - \bar{Y}; & x_i &= X_i - \bar{X}. \end{aligned}$$

Побудова та аналіз економетричної моделі з двома змінними

Нехай економетрична модель з двома змінними подана у вигляді:

$$Y = a_0 + a_1 X + u,$$

де стохастична складова має нульове математичне сподівання та постійну дисперсію, оцінимо параметри цієї моделі звичайним методом найменших квадратів (МНК).

В основу методу МНК покладено принцип мінімізації суми квадратів залишків моделі. Реалізація цього принципу дає змогу дістати систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i; \\ \hat{a}_0 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

У цій системі n – кількість спостережень; $\sum_{i=1}^n x_i$, $\sum_{i=1}^n y_i$, $\sum_{i=1}^n x_i^2$, $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ – величини, значення яких можна обчислити на основі спостережень над змінними Y та X .

Розв'язавши систему нормальних рівнянь, дістанемо оцінки невідомих параметрів моделі \hat{a}_0 і \hat{a}_1 :

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X.$$

Достовірність побудованої економетричної моделі можна перевірити, скориставшись елементами дисперсійного аналізу. Насамперед слід обчислити залишки моделі

$$u_i = Y_i - \hat{Y}_i,$$

а далі знайти їх дисперсію:

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum u_i^2}{n - m},$$

де m - кількість змінних моделі ($m = 2$), і визначити стандартну похибку кожного параметра моделі:

$$S_{\hat{a}_j} = \sigma_u \sqrt{c_{jj}}.$$

Тут c_{jj} характеризує відповідний діагональний елемент матриці похибок (оберненої до матриці системи нормальних рівнянь).

На підставі коефіцієнта детермінації

$$R^2 = \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_u^2}{\sigma_Y^2} = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_Y^2}$$

Можна дійти висновку про ступінь значущості вимірюваного зв'язку згідно з економетричною моделлю. Значення R^2 належит такому інтервалу: $R^2 \in]0,1[$.

Оскільки коефіцієнт детермінації R^2 характеризує, якою мірою варіація залежної змінної визначається варіацією незалежної змінної, то чим ближче R^2 до одиниці, тим впевненіше можна стверджувати, що зв'язок між цими змінними є статистично значущим.

Коефіцієнт кореляції $|R| = \sqrt{R^2}$ характеризує тісноту зв'язку між змінними моделі. Він належит інтервалу $R \in]-1,1[$. Чим ближче коефіцієнт кореляції за модулем до одиниці, тим тіснішим є зв'язок. Знак «мінус» свідчить про обернений зв'язок, «плюс» – про прямий.

Приклад 3.1. Оцінити параметри економетричної моделі роздрібного товарообігу, що характеризує залежність між роздрібним товарообігом та доходами населення.

Вхідні дані в умовних грошових одиницях наведені у таблиці 3.1:

Таблиця 3.1.

Доходи населення	18	20	21	22	24	25	27	28	29	31
Роздрібний товар	17	18	19	20	21	23	24	25	26	27

Розв'язання.

1. З початку за фактичними даними таблиці встановлюємо належність змінних до груп незалежних та залежних: очевидно, що за незалежні (вхідні)

змінні x приймаються доходи населення, а за незалежну (результативну) y – роздрібний товарообіг.

2. Нехай економетрична модель специфікована у лінійній формі:

$$Y = a_0 + a_1 X + u,$$

де a_0, a_1 – параметри моделі; u – стохастична складова (залишки).

Перетворення вхідних даних для побудови моделі наведені у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2.

№ з/п	Y_i	X_i	X_i^2	$X_i Y_i$	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(X_i - \bar{X}) \times (Y_i - \bar{Y})$	\hat{Y}_i	u_i	u_i^2	$(Y_i - \bar{Y})^2$
1.	17	18	324	306	-6,5	-5	42,25	32,5	16,67	0,33	0,1089	25
2.	18	20	400	360	-4,5	-4	20,25	18,0	18,31	-0,31	0,0961	16
3.	19	21	441	399	-3,1	-3	9,61	10,5	19,31	-0,13	0,0169	9
4.	20	22	484	440	-2,5	-2	6,25	5,0	19,25	0,75	0,5625	4
5.	21	24	576	504	-0,5	-1	0,25	0,5	21,59	-0,59	0,3481	1
6.	23	25	625	575	0,5	1	0,25	0,5	22,41	0,59	0,3481	1
7.	24	27	729	648	2,5	2	6,25	5,0	24,05	-0,5	0,0125	4
8.	25	28	784	700	3,5	3	12,25	10,5	24,87	0,13	0,0169	9
9.	26	29	841	754	4,5	4	20,25	18,0	25,69	0,31	0,0961	16
10.	27	31	961	837	6,5	5	42,25	32,5	27,33	-0,33	0,1089	25
$\sum_{i=1}^{10}$	220	245	6165	5523	-	-	162,5	133	-	-	1,145	110

3. Оцінимо параметри моделі $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X$ за методом 1МНК. Для цього запишемо систему нормальних рівнянь для даної задачі:

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{10} x_i = \sum_{i=1}^{10} y_i; \\ \hat{a}_0 \sum_{i=1}^{10} x_i + \hat{a}_1 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i y_i. \end{cases}$$

$n = 10$ - кількість спостережень.

Підставивши в цю систему значення $\sum_{i=1}^{10} x_i, \sum_{i=1}^{10} y_i, \sum_{i=1}^{10} x_i^2, \sum_{i=1}^{10} x_i y_i$, обчислені згідно з вхідними даними таблиці, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 10\hat{a}_0 + 245\hat{a}_1 = 220 \\ 245\hat{a}_0 + 6165\hat{a}_1 = 5523. \end{cases}$$

Розв'язком системи є параметри $\hat{a}_0 = 1,91; \hat{a}_1 = 0,82$.

Отже економетрична модель роздрібного товарообігу запишеться так:

$$\hat{Y} = 1,91 + 0,82X.$$

4. Обчислимо дисперсії залежної змінної та залишків:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1} = \frac{110}{9} = 12,2;$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum u_i^2}{n-2} = \frac{1,145}{8} = 0,14.$$

5. Визначимо коефіцієнти детермінації та кореляції:

$$R^2 = \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_u^2}{\sigma_Y^2} = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_Y^2} = 1 - \frac{0,14}{12,2} \approx 0,99;$$

$$|R| = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,99} = 0,994.$$

Коефіцієнт кореляції беремо зі знаком «плюс». Оскільки коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,99$, це свідчить про те, що варіація обсягу роздрібного товарообігу на 99% визначається варіацією доходів населення. Коефіцієнт кореляції $R = 0,994$ показує, що існує тісний зв'язок між цими соціально-економічними показниками. Значення коефіцієнта детермінації і коефіцієнта кореляції для парної економетричної моделі свідчать про статистичну значущість зв'язку, якщо вони наближаються до одиниці.

6. Знайдемо матрицю похибок C (матрицю, обернену до матриці системи нормальних рівнянь):

$$\begin{pmatrix} 10 & 245 \\ 245 & 6165 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 245 & 1 & 0 \\ 245 & 6165 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3,79 & -0,15 \\ 0 & 1 & -0,15 & 0,006 \end{array} \right)$$

$$C = \begin{pmatrix} 3,79 & -0,15 \\ -0,15 & 0,006 \end{pmatrix} - \text{матриця похибок.}$$

7. Визначимо стандартні похибки оцінок параметрів моделі, враховуючи дисперсію залишків:

$$S_{\hat{a}_0} = \sqrt{\sigma_u^2 c_{11}} = \sqrt{0,14 \cdot 3,79} = 0,73$$

$$S_{\hat{a}_1} = \sqrt{\sigma_u^2 c_{22}} = \sqrt{0,14 \cdot 0,006} = 0,028.$$

Порівняємо стандартні похибки оцінок параметрів моделі зі значеннями цих оцінок. Так, стандартна похибка оцінки параметра \hat{a}_1 становить 3,4% абсолютного значення цієї оцінки (0,82), що свідчить про незміщеність такої оцінки параметра моделі. Стандартна похибка оцінки параметра \hat{a}_0 становить 38% абсолютного значення цієї оцінки (1,91), а отже, згаданий параметр може мати зміщення, яке зумовлюється невеликою сукупністю спостережень ($n = 10$).

8. **Висновки.** Економетрична модель $\hat{Y} = 1,91 + 0,82X$ кількісно описує зв'язок роздрібного товарообігу і доходів населення.

Параметр $\hat{a}_1 = 0,82$ характеризує граничний розмір витрат на купівлю товарів у роздрібній торгівлі, тобто коли дохід збільшується на одиницю, то обсяг роздрібного товарообігу зростає на 0,82 одиниці: $\hat{a}_1 = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X}$.

Визначимо коефіцієнт еластичності (відносний ефект впливу фактора x на результат y) роздрібного товарообігу залежно від доходів населення:

$$E_{y/x} = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X} \cdot \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = 0,82 \cdot \frac{22}{24,5} = 0,91.$$

Коефіцієнт еластичності показує, на скільки процентів у середньому зміниться результат y зі зміною фактора x на 1%.

Знаючи коефіцієнт еластичності, можна дійти висновку, що зі збільшенням доходів населення на 1% роздрібний товарообіг зростає на 0,91%.

3.4. Специфікація моделі

Економетрична модель базується на єдності двох аспектів – теоретичного, якісного аналізу взаємозв'язків та емпіричної інформації. Теоретична інформація знаходить своє відображення в специфікації моделі.

Специфікація моделі – це аналітична форма економетричної моделі. Вона складається з певного виду функції чи функцій, що використовуються для побудови моделі, має ймовірнісні характеристики, які притаманні стохастичним залишкам моделі.

Як відомо, численні взаємозв'язки між економічними показниками не можна формалізувати лише на базі простої економетричної моделі. Наведені раніше приклади економетричних моделей показують, що вони описують вплив багатьох чинників на економічні процеси та явища. Причому для формалізації цих зв'язків може використовуватись не одне рівняння, а їх система.

Види рівнянь регресії та визначення їх параметрів

В регресійному аналізі розрізняють рівняння парної (простої) та множинної (багатофакторної) регресії. Коли зв'язок із залежною змінною y здійснюється з одним видом незалежних змінних x , то рівняння регресії є найпростішим і має назву рівняння *парної регресії* (проста модель). Якщо залежна змінна y пов'язана з декількома видами незалежних змінних x_j ($j = \overline{1, m}$), то така залежність має назву рівняння *множинної регресії*. Використовуються такі види рівнянь регресії:

З досвіду економетричних досліджень, а також на підставі якісного теоретичного аналізу взаємозв'язків між економічними показниками можна навести клас функцій, які можуть описувати ці взаємозв'язки:

Парна регресія:

Множинна регресія:

а) лінійна функція

$$y = a_0 + a_1 x;$$

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m;$$

б) степенева функція

$$y = a_0 x^{a_1};$$

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m};$$

в) гіперболічна функція

$$y = a_0 + a_1 \frac{1}{x};$$

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_m}{x_m};$$

де $z_j = \frac{1}{x_j}$;

г) квадратична функція

$$y = a_0 + a_1 x^2;$$

$$y = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_m x_m^2.$$

де $t_j = x_j^2$;

У цих функціях: y – залежна (пояснювана) змінна; $x_j, (j = \overline{1, k})$ – незалежні, або пояснювальні, змінні; $a_j, (j = \overline{0, k})$ – параметри функцій.

Серед наведених щойно видів функцій три останні є нелінійними. Але за допомогою перетворення залежної і незалежних змінних ці функції можна звести до лінійних. Отже, всі записані функції можуть бути реалізовані на практиці як лінійні.

Оскільки лінійні функції найпоширеніші в економетричному моделюванні, то це твердження може пояснити той факт, що економетричні методи обґрунтовуються, як правило, на базі лінійних моделей.

Маючи на увазі, що вибір аналітичної форми економетричної моделі не може розглядатись без конкретного переліку незалежних змінних, специфікація моделі передбачає добір чинників для економетричного дослідження.

При цьому в процесі такого дослідження можна кілька разів повертатись до етапу специфікації моделі, уточнюючи перелік незалежних змінних та вид функції, що застосовується. Адже коли вид функції та її складові не відповідають реальним процесам, то йдеться про помилки специфікації.

Помилки специфікації моделі можуть бути трьох видів:

- 1) ігнорування істотної пояснюючої змінної при побудові економетричної моделі;
- 2) введення до моделі незалежної змінної, яка не стосується вимірюваного зв'язку;
- 3) використання не відповідних математичних форм залежності.

Перша з цих помилок призводить до зміщення оцінок, причому зміщення буде тим більшим, чим більша кореляція між введеними та не введеними до моделі змінними, а напрям зміщення залежить від знака оцінок параметрів при введених змінних і від характеру кореляції між введеними та не введеними змінними. Застосування способів перевірки значущості зміщених параметрів може спричинити до хибних висновків щодо значень параметрів генеральної сукупності.

Для відшукування цього джерела помилок специфікації досить важко запропонувати які-небудь загальні міркування, оскільки незалежна змінна, що не враховується (або незалежні змінні), може бути одним із багатьох можливих пояснень. Про необхідність введення до моделі цих незалежних змінних можна лише здогадуватись на підставі апріорних міркувань. Проте відомі й більш формалізовані процедури, які дають змогу з'ясувати, наскільки істотним є введення до моделі якої-небудь змінної. Так, наприклад, якщо побудувати економетричну модель на базі покрокової регресії, то можна досить чітко ранжувати пояснювальні змінні за величиною їх впливу на залежну змінну. Про відсутність основної змінної свідчить зміна поведінки випадкового відхилення у помилково специфікованій моделі.

Друга помилка специфікації. В цьому разі, якщо до моделі вводиться змінна, яка неістотно впливає на залежну змінну, то (на відміну від першої помилки специфікації) оцінки параметрів моделі будуть незміщеними. Причому за допомогою звичайних процедур можна дістати також незміщені оцінки дисперсій цих параметрів. Але це не означає, що економетричну модель можна беззастережно розширювати за рахунок "неістотних" змінних: існує ненульова ймовірність того, що в результаті використання вибіркового даних змінна, яка зовсім не стосується моделі, покаже істотний зв'язок із залежною змінною. А це означає, що кількісний зв'язок між змінними буде вимірний неправильно.

Третя помилка специфікації. Припускається, що залежна змінна є лінійною функцією від деякої пояснювальної змінної, тоді як насправді тут краще підійшла б квадратична, кубічна чи якась поліноміальна залежність вищого порядку. У цьому разі наслідки такі самі, як і при першій помилці, тобто оцінки параметрів моделі матимуть зміщення.

Питання про вибір найкращої форми залежності, тобто про адекватність моделі, має ґрунтуватися на перевірці ступеня узгодженості виду функції $\hat{y} = f(X)$ з вхідними даними спостережень y .

Ця вимога еквівалентна вимозі, щоб залишкова компонента $u_i = y_i - \hat{y}_i$ ($i = \overline{1, n}$) задовольняла умовам випадкової змінної. У класичній лінійній економетричній моделі змінна u інтерпретується як випадкова змінна, яка має розподіл з математичним сподіванням, що дорівнює нулю, і сталою дисперсією σ_u^2 . Це дає змогу розглядати змінну u як стохастичне збурення (помилку, відхилення). З огляду на те, що u охоплює вплив багатьох чинників, які можна вважати незалежними, на підставі центральної граничної теореми теорії ймовірностей, передбачається, що стохастична складова економетричної моделі розподілена за нормальним законом.

Математичний аналіз цієї складової дає змогу зробити висновок щодо того, чи можна вважати її стохастичною і чи містить вона систематичну частину відхилень, яка може бути зумовлена наявністю тих чи інших помилок у моделюванні.

Отже, специфікація моделі визначає змінні, які увійдуть в модель, функції зв'язку між змінними $Y = f(X)$ та закон розподілу ймовірностей випадкової змінної u .

3.5. Передумови застосування методу найменших квадратів

У загальному матричному вигляді економетрична модель для фактичних даних записується так:

$$Y = AX + u, \quad (3.7)$$

де A - матриця параметрів моделі розміром $m \times n$ (m - кількість незалежних змінних, n - число спостережень); Y - матриця значень залежної змінної; X - матриця значень незалежних змінних; u - вектор залишків.

Незалежні фактичні змінні X (пояснювальні змінні) найчастіше бувають детермінованими і вони є наперед заданими змінними, або вхідними показниками для розглядаємої економічної системи.

Випадкові складові u називають ще *стохастичними складовими, помилками* або частіше *залишками*. Вони є наслідками помилок спостережень, містять у собі вплив усіх випадкових факторів, а також факторів, які не входять у модель.

З огляду того, що залежні фактичні змінні Y (пояснювані змінні), які є результативними показниками, залежать від випадкової складової u , то вони також є стохастичними (випадковими). Звідси і економетрична модель є стохастичною.

У ряді випадків економетричні моделі можуть бути описані методами кореляційно-регресійного аналізу. Задачею регресійного аналізу є встановлення виду залежності між змінними та вивчення залежності між ними. Основною задачею кореляційного аналізу є виявлення зв'язку між змінними та оцінка її тісноти та значимості. Але на застосування кореляційно-регресійного аналізу накладаються такі вимоги:

- 1) необхідність достатньо великої сукупності спостережень;
- 2) забезпечення однорідної сукупності спостережень;
- 3) наявність нормального закону розподілення сукупності вивчаємих одиниць, на якому побудовані всі положення кореляційно-регресійного аналізу.

Оцінювати параметри економетричної моделі за допомогою 1МНК можна за умов:

1. Математичне сподівання залишків, тобто середня величина випадкових значень, дорівнює нулю

$$M(u) = 0. \quad (3.8)$$

Якщо ця передумова не виконується, то йдеться про помилки специфікації.

2. Значення u_i в матриці залишків u незалежні між собою і мають постійну дисперсію σ^2 :

$$M(uu') = \sigma^2 E, \quad (3.9)$$

де E - одинична матриця; u' - матриця, транспонована до матриці u .

Нагадаємо, що дисперсія відображає «розсіювання» випадкових значень u_i навколо їх математичного сподівання.

Наявність сталої (постійної) дисперсії залишків називається **гомоскедастичністю**. Ця властивість може виконуватись лише тоді, коли залишки u є помилками вимірювання.

3. Незалежні змінні моделі не пов'язані із залишками:

$$M(X'u) = 0. \quad (3.10)$$

При порушенні цієї умови для оцінювання параметрів моделі використовуються не 1МНК, а інші методи.

4. Незалежні змінні моделі утворюють незалежну систему векторів, тобто ці змінні незалежні між собою:

$$|X'X| \neq 0.$$

Якщо незалежні змінні пов'язані між собою, то це явище називають *мультиколінеарністю* і воно є небажаним, так як робить оцінку параметрів за допомогою 1МНК ненадійною чутливою до вибраної специфікації моделі.

3.6. Оператор оцінювання 1МНК

Скористаємося матричним записом моделі

$$Y = XA + u,$$

для якої виконуються умови (3.8)-(3.10), щоб оцінити параметри методом 1МНК.

Рівняння (1) подамо у вигляді: $u = Y - XA$.

Тоді суму квадратів залишків u можна записати так:

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 = u'u = (Y - XA)'(Y - XA) = Y'Y - 2A'X'Y + A'X'XA.$$

Продиференціюємо цю умову за A і прирівняємо похідні до нуля:

$$\frac{\partial(u'u)}{\partial A} = -2X'Y + 2X'XA = 0.$$

або

$$X'XA = X'Y. \quad (3.11)$$

Тут X' – матриця, транспонована до матриці незалежних змінних X .

Звідси

$$\hat{A} = (X'X)^{-1} X'Y. \quad (3.12)$$

Рівняння (3.11) дає матричну форму запису системи нормальних рівнянь, а формула (3.12) показує, що значення вектора \hat{A} є розв'язком системи таких рівнянь. Неважко показати, що оцінки \hat{A} , обчислені за (3.12), мінімізують суму квадратів залишків u .

При цьому значення вектору \hat{A} є розв'язком системи нормальних рівнянь $(X'X)\hat{A} = X'Y$.

Якщо незалежні змінні в матриці X взяті як відхилення кожного значення від свого середнього, то матрицю $X'X$ називають матрицею моментів.

Числа, що розміщені на її головній діагоналі, характеризують величину дисперсій незалежних змінних, інші елементи відповідають взаємним коваріаціям.

Отже, структура матриці моментів відбиває зв'язки між незалежними змінними. Чим ближчі показники коваріацій до величини дисперсій, тим ближчий визначник матриці $X'X$ до нуля і тим гірші оцінки параметрів \hat{A} . Далі буде показано, що стандартні помилки параметрів \hat{A} прямо пропорційні до значень, розміщених на головній діагоналі матриці $(X'X)^{-1}$.

Розглянемо приклад оцінювання параметрів моделі 1МНК.

Приклад 3.2. Оцінити параметри економетричної моделі, що характеризує залежність між тижневими витратами на харчування, загальними витратами та розміром сім'ї. Вихідні дані в умовних одиницях наведені в табл.

№ з/п	Витрати на харчування (y), ум. од.	Загальні витрати (x_1), ум. од.	Розмір сім'ї (x_2), кількість членів
1	22	45	1,5
2	34	75	1,6
3	50	125	1,9
4	67	223	1,8
5	47	92	3,4
6	66	146	3,6
7	81	227	3,4
8	106	358	3,5
9	70	135	5,5
10	95	218	5,4
11	119	331	5,4
12	147	490	5,3
13	93	175	8,5
14	133	305	8,3
15	169	468	8,1
16	197	749	7,3

Розв'язування. Запишемо економетричну модель:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + u,$$

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1x_1 + \hat{a}_2x_2,$$

де y, \hat{y} – відповідно фактичні та розрахункові значення тижневих витрат на харчування за моделлю; x_1 - загальні витрати; x_2 – розмір сім'ї; u – залишки; $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ – параметрів моделі.

Оператор оцінювання параметрів моделі за 1МНК має вигляд

$$\hat{A} = (X'X)^{-1}X'Y,$$

де

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 45 & 1,5 \\ 1 & 75 & 1,6 \\ 1 & 125 & 1,9 \\ 1 & 223 & 1,8 \\ 1 & 92 & 3,4 \\ 1 & 146 & 3,6 \\ 1 & 227 & 3,4 \\ 1 & 358 & 3,5 \\ 1 & 135 & 5,5 \\ 1 & 218 & 5,4 \\ 1 & 331 & 5,4 \\ 1 & 490 & 5,3 \\ 1 & 175 & 8,5 \\ 1 & 305 & 8,3 \\ 1 & 468 & 8,1 \\ 1 & 749 & 7,3 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 22 \\ 34 \\ 50 \\ 67 \\ 47 \\ 66 \\ 81 \\ 106 \\ 70 \\ 95 \\ 119 \\ 147 \\ 93 \\ 133 \\ 169 \\ 197 \end{pmatrix};$$

X' – матриця, транспонована до матриці X .

Одиниця в матриці незалежних змінних X дописується тоді, коли економетрична модель має вільний член a_0 (як у нашому випадку).

Згідно з оператором оцінювання обчислюємо матриці:

$$1) (X'X) = \begin{pmatrix} 16 & 416,2 & 74,5 \\ 416,2 & 1601562 & 23271,2 \\ 74,5 & 23271,2 & 436,69 \end{pmatrix}; \quad 3) X'Y = \begin{pmatrix} 1495 \\ 520090 \\ 8367,9 \end{pmatrix};$$

$$2) (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,314 & -0,00017 & -0,0446 \\ -0,00017 & 0,00003 & -0,00012 \\ -0,0446 & -0,00012 & 0,0165 \end{pmatrix}; \quad 4) \hat{A} = \begin{pmatrix} 8,8 \\ 0,2 \\ 6,97 \end{pmatrix}.$$

Отже, економетрична модель множинної регресії для тижневих витрат на харчування має вигляд:

$$\hat{Y} = 8,8 + 0,2x_1 + 6,97x_2.$$

Знайдені методом 1МНК оцінки параметрів такі: $\hat{a}_0 = 8,8$, $\hat{a}_1 = 0,2$, $\hat{a}_2 = 6,97$, тобто

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 8,8 \\ 0,2 \\ 6,97 \end{pmatrix}.$$

Висновки. Коли за всіх однакових умов незалежна змінна x_1 (загальні витрати) змінюється (збільшується або зменшується) на одиницю, то залежна змінна \hat{Y} (оцінка витрат на харчування) також змінюється на 0,2 одиниць. Якщо за

інших незмінних умов незалежна змінна x_2 (розмір сім'ї) змінюється на одиницю, то залежна змінна \hat{Y} змінюється на 6,97 одиниць.

3.7. Статистичні властивості оцінок параметрів моделі за методом найменших квадратів

У класичній регресійній моделі $Y = XA + u$ вектор u і залежний від нього вектор Y є випадковими змінними. До оператора оцінювання \hat{A} входить Y ($\hat{A} = (X'X)^{-1} X'Y$) отже, оператор \hat{A} також можна вважати випадковою функцією оцінювання параметрів моделі.

Оцінки параметрів \hat{A} є вибірковими характеристиками і повинні мати такі властивості: незміщеність; обґрунтованість; ефективність; інваріантність.

Різниця між математичним сподіванням оцінки і значенням оціненого параметра $\theta = M(\hat{A}) - A$ називається зміщенням оцінки.

Не можна плутати помилку оцінки з її зміщенням. Помилка дорівнює $\hat{A} - A$ і є випадковою величиною, а зміщення – величина стала.

Означення 3.1. Вибіркова оцінка \hat{A} параметра A називається незміщеною, якщо вона задовольняє рівності

$$M(\hat{A}) = A.$$

Незміщеність – це мінімальна вимога, яка ставиться до оцінок параметрів \hat{A} .

Якщо оцінка незміщена, то при багаторазовому повторенні випадкової вибірки попри те, що для окремих вибірок, можливо, були помилки оцінки, середнє значення цих помилок дорівнює нулю.

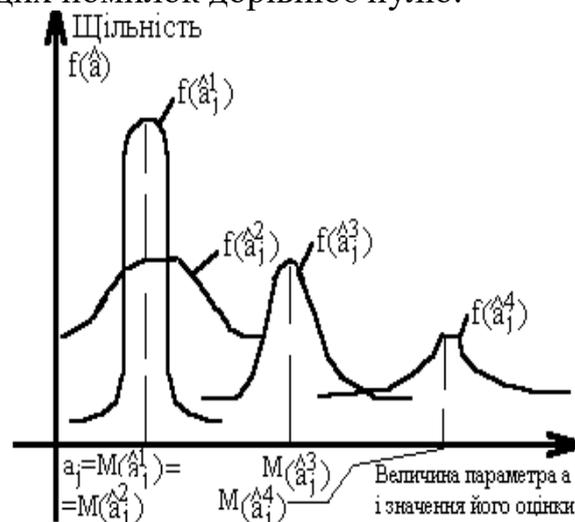


Рис.3.3. Вибірковий розподіл двох різних оцінок

На рис.3.3. подані графіки чотирьох функцій щільності розподілу для довільного обсягу вибірки n . Незміщеними є оцінки \hat{a}_j^1 і \hat{a}_j^2 . Інші оцінки є додатньо зміщеними.

Означення 3.2. Оцінка називається обґрунтованою, якщо відхилення її вибірових оцінок \hat{A} від справжніх значень A буде менше заданої досить малої величини $\varepsilon > 0$ з граничною імовірністю, що дорівнює одиниці

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{A} - A| < \varepsilon\} = 1.$$

Іншими словами, оцінка обґрунтована, коли вона задовольняє закону великих чисел. Обґрунтованість помилки означає, що чим більші будуються вибірки, тим більша ймовірність того, що помилка оцінки не перевищуватиме достатньо малої величини ε .

Інтерпретуючи графіки рис.1 як одержані для за одним методом оцінювання чотирьох різних об'ємів виборок n

$$f(\hat{a}_j^1) \text{ для } n = 100,$$

$$f(\hat{a}_j^2) \text{ для } n = 50,$$

$$f(\hat{a}_j^3) \text{ для } n = 20,$$

$$f(\hat{a}_j^4) \text{ для } n = 10$$

можна зробити висновок, що при $n = 10$ оцінки мають значне зміщення та дисперсію. Із збільшенням n зміщення зникає є дисперсія зменшується.

Третя властивість оцінок \hat{A} – ефективність, пов'язана з величиною дисперсії оцінок.

Означення 3.3. Вибіркова оцінка \hat{A} параметрів A називається ефективною, коли дисперсія цієї оцінки є найменшою.

Це поняття відноситься до незміщених оцінок. Якщо оцінка зміщена, то використовують середню квадратичну помилку оцінки (\hat{a}_j^3) , яка дорівнює суммі дисперсій оцінки \hat{a}_j та квадрата її зміщення

$$M(\hat{a}_j - a)^2 = \sigma_{\hat{a}_j}^2 + \text{квадрат зміщення.}$$

Перевага віддається зміщеній функції з малою дисперсією (\hat{a}_j^3) переднезміщеною функцією оцінювання з відносно великою дисперсією (\hat{a}_j^2) , тобто вирішальною якістю є висока імовірність попадання справжнього значення параметра в малий оцінений довірчий інтервал.

Тут доречно сформулювати важливу теорему Гаусса-Маркова, що стосується ефективності оцінки 1МНК.

Теорема Гаусса – Маркова. Функція оцінювання за методом 1МНК покомпонентно мінімізує дисперсію всіх лінійно незміщених функцій вектора оцінок \hat{A} :

$$\sigma_{\hat{A}}^2 \leq \sigma_A^2 \text{ для } j = \overline{1, m},$$

де $\sigma_{\hat{A}}^2$ – дисперсія оцінок \hat{A} , визначених згідно з 1МНК, $\sigma_{\frac{2}{A}}$ – дисперсія оцінок \bar{A} , визначених іншими методами.

Отже, функція оцінювання 1МНК \hat{A} у класичній лінійній моделі є найкращою (мінімально дисперсійною) лінійною незміщеною функцією оцінювання. (Цю властивість називають BLUE).

Ще одна важливість оцінок – їх *інваріантність*.

Означення 3.4. Оцінка \hat{A} параметрів A називається інваріантною, якщо для довільно заданої функції g оцінка параметрів функції $g(A)$ подається у вигляді $g(\hat{A})$.

Іншими словами, інваріантність оцінки базується на тому, що в разі перетворення параметрів A за допомогою деякої функції g таке саме перетворення, виконане щодо \hat{A} , дає оцінку $g(\hat{A})$ нового параметра.

Інваріантність оцінок має велике практичне значення. Наприклад, якщо відома оцінка дисперсії генеральної сукупності і вона інваріантна, то оцінку середньоквадратичного відхилення можна дістати, добувши квадратний корінь із оцінки дисперсії. Коефіцієнт кореляції R є інваріантною оцінкою до коефіцієнта детермінації R^2 ($R = \sqrt{R^2}$).

3.8. Коваріаційна матриця оцінок параметрів моделі

Відомо, що для характеристики випадкових змінних \hat{a}_j , поряд з математичним сподіванням, застосовуються також дисперсія $\sigma_{\hat{a}_j}^2$ і коваріація $\sigma_{\hat{a}_j \hat{a}_k}$. Істинні (справжні) значення цих параметрів класичної економетричної моделі утворюють **дисперсійно-коваріаційну матрицю**

$$\text{var}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{a_1}^2 & \sigma_{a_1 a_2} & \cdots & \sigma_{a_1 a_j} & \cdots & \sigma_{a_1 a_m} \\ \sigma_{a_2 a_1} & \sigma_{a_2}^2 & \cdots & \sigma_{a_2 a_j} & \cdots & \sigma_{a_2 a_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{a_j a_1} & \sigma_{a_j a_2} & \cdots & \sigma_{a_j}^2 & \cdots & \sigma_{a_j a_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{a_m a_1} & \sigma_{a_m a_2} & \cdots & \sigma_{a_m a_j} & \cdots & \sigma_{a_m}^2 \end{pmatrix}; \quad (3.12)$$

Оцінки коваріаційної матриці $\text{var}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$ використовуються для знаходження стандартних помилок та обчислення довірчих інтервалів оцінок параметрів \hat{a}_j . Вони використовуються й при перевірці їх статистичної значущості.

На головній діагоналі матриці $\text{var}(\hat{A})$ містяться оцінки дисперсій $\sigma_{\hat{a}_j}^2$ j -ї оцінки параметрів, що ж до елементів $\sigma_{\hat{a}_j\hat{a}_k}$ ($j \neq k$), які розміщені поза головною діагоналлю, то вони є оцінками коваріації між \hat{a}_j і \hat{a}_k . Отже,

$$\text{var}(\hat{A}) = \hat{\sigma}_u^2 (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2 & \hat{\sigma}_{\hat{a}_1\hat{a}_2} & \cdots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_1\hat{a}_j} & \cdots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_1\hat{a}_m} \\ \hat{\sigma}_{\hat{a}_2\hat{a}_1} & \hat{\sigma}_{\hat{a}_2}^2 & \cdots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_2\hat{a}_j} & \cdots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_2\hat{a}_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_1} & \hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_2} & \cdots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_j}^2 & \cdots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\sigma}_{\hat{a}_m\hat{a}_1} & \hat{\sigma}_{\hat{a}_m\hat{a}_2} & \cdots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_m\hat{a}_j} & \cdots & \hat{\sigma}_{\hat{a}_m}^2 \end{pmatrix}; \quad (3.13)$$

де $\hat{\sigma}_u^2$ — незміщена оцінка дисперсії залишків; $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-m}$.

Оскільки вектор залишків $\hat{u} = Y - \hat{Y} = Y - \hat{A}'X$, то добуток векторів $\hat{u}'\hat{u}$ можна записати так:

$$\hat{u}'\hat{u} = Y'Y - \hat{A}'X'X.$$

Звідси маємо альтернативну форму запису дисперсії залишків:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{Y'Y - \hat{A}'X'X}{n-m}.$$

Позначимо (j, k) -й елемент матриці $(X'X)^{-1}$ символом c_{jk} , тоді j -й елемент по головній діагоналі матриці $\text{var}(\hat{A})$ обчислюється за формулою:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_j}^2 = \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{jj} \quad (j = \overline{1, m}). \quad (3.14)$$

Коваріації $\sigma_{\hat{a}_j\hat{a}_k}$ що містяться за межами головної діагоналі, відповідно такі:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_k} = \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{jk}. \quad (3.15)$$

Приклад 3.3. Для економетричної моделі (приклад 3.2) обчислити коваріаційну матрицю $\text{var}(\hat{A})$.

Отже, маємо:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 8,8 \\ 0,2 \\ 6,97 \end{pmatrix}; \quad (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,314 & -0,00017 & -0,0446 \\ -0,00017 & 0,00003 & -0,00012 \\ -0,0446 & -0,00012 & 0,0165 \end{pmatrix};$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1495 \\ 520090 \\ 8367,9 \end{pmatrix};$$

$$n = 16; m = 3.$$

Розв'язання.

1. Обчислимо оцінку незміщеної дисперсії залишків $\hat{\sigma}_u^2$, скориставшись формулою:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{Y'Y - \hat{A}'X'Y}{n - m};$$

$$Y'Y = \sum_{i=1}^n y_i^2 = 22^2 + 34^2 + \dots + 197^2 = 176394;$$

$$A'X'Y = (8,8 \ 0,2 \ 6,97) \cdot \begin{pmatrix} 1496 \\ 520090 \\ 8367,9 \end{pmatrix} = 13156 + 104018 + 58324,0 = 175498,0;$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{176394 - 175498}{16 - 3} = \frac{896}{13} = 68,92.$$

2. Визначимо дисперсії оцінок $\hat{\sigma}_{\hat{a}_j}^2$:

$$\text{var}(\hat{a}_1) = \hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2 = \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{11} = 68,92 \cdot 0,314 = 21,64;$$

$$\text{var}(\hat{a}_2) = \hat{\sigma}_{\hat{a}_2}^2 = \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{22} = 68,92 \cdot 0,00003 = 0,00207;$$

$$\text{var}(\hat{a}_3) = \hat{\sigma}_{\hat{a}_3}^2 = \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{33} = 68,92 \cdot 0,0165 = 1,137.$$

3. Обчислимо коваріації відповідних оцінок параметрів:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1\hat{a}_2} = \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{12} = 68,92 \cdot (-0,00017) = -0,0118;$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1\hat{a}_3} = \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{13} = 68,92 \cdot (-0,0446) = -3,0738;$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_2\hat{a}_3} = \hat{\sigma}_u^2 \cdot c_{23} = 68,92 \cdot (-0,00012) = -0,00827.$$

Знак «мінус» перед оцінками коваріацій $\hat{\sigma}_{\hat{a}_j\hat{a}_k}$ указує на те, що збільшення однієї оцінки параметрів приводить до зменшення в середньому іншої і навпаки.

Отже, дістанемо дисперсійно-коваріаційну матрицю:

$$\text{var}(\hat{A}) = \begin{pmatrix} 21,64 & -0,0118 & -3,0738 \\ -0,0118 & 0,00207 & -0,00827 \\ -3,0738 & -0,00827 & 1,137 \end{pmatrix}.$$

4. Запишемо стандартні помилки оцінок параметрів моделі:

$$S_{\hat{a}_j} = \sqrt{\text{var}(\hat{a}_j)};$$

$$S_{\hat{a}_1} = \sqrt{21,64} = 4,65;$$

$$S_{\hat{a}_2} = \sqrt{0,00207} = 0,0455 \approx 0,046;$$

$$S_{\hat{a}_3} = \sqrt{1,137} = 1,066.$$

Порівняємо кожен стандартну помилку $S_{\hat{a}_j}$ з відповідним числовим значенням оцінки параметра, тобто знайдемо відношення $\frac{S_{\hat{a}_j}}{|\hat{a}_j|}$:

$$\frac{S_{\hat{a}_1}}{|\hat{a}_1|} \cdot 100 = \frac{4,65}{8,8} \cdot 100 = 52,8\%;$$

$$\frac{S_{\hat{a}_2}}{|\hat{a}_2|} \cdot 100 = \frac{0,046}{0,2} \cdot 100 = 23\%;$$

$$\frac{S_{\hat{a}_3}}{|\hat{a}_3|} \cdot 100 = \frac{1,066}{6,97} \cdot 100 = 15\%.$$

Отже, стандартні помилки оцінок параметрів щодо рівня оцінок параметрів становлять відповідно 53%, 23% і 15%, а це свідчить про зміщеність оцінок.

Наслідком зміщеності є також те, що $M(u) \neq 0$. У розглянутому прикладі $M(u) = 0,22$. Це означає, що залишки можуть мати систематичну складову, яка зумовлюється неточною специфікацією моделі. Наприклад, не всі основні чинники, що впливають на тижневі витрати пов'язані з харчуванням (скажімо, ціни на продукти харчування), внесено до моделі.

3.9. Точкові та інтервальні прогнози

Одне з важливих завдань економетричного моделювання – оцінити прогнозне значення залежної змінної за умови, що пояснювальні змінні задані на перспективу. Позначимо визначений на перспективу вектор пояснюючих змінних – X_p . Тоді очікуване значення Y , дорівнюватиме $M(Y/X_p) = X_p A$. Але у цьому випадку не слід думати, що величина Y буде у всіх випадках дорівнювати $X_p A$. Це пов'язано із специфікою поняття “математичне сподівання”. $M(Y/X_p)$ виражає лише середні співвідношення між Y та X і не виключає ситуацій, коли при тих або інших величинах X фактичні реалізації Y можуть суттєво відхилятися від значень цієї функції. Зауважимо, що $\hat{Y}_p = X_p \hat{A}$ можна розглядати як точкову оцінку математичного сподівання прогнозного значення Y_p , а також як індивідуальне значення Y_p для вектора незалежних змінних X_p , що лежить за межами базового періоду.

Незміщена оцінка точкового прогнозу запишеться так:

$$M[Y_p(X_p)] = X_p A$$

де X_p – заданий на перспективу рядок матриці незалежних змінних X при $i = p$; Y_p – точковий прогноз залежної функції на основі економетричної моделі.

У тих випадках, коли окремі реалізації Y/X є випадковими, прогнозне рівняння, що виходить із кореляційного співвідношення $M(Y/X)$, слід записувати як $Y = M(Y/X) + u$, де u – невідома випадкова помилка. Грунтуючись на припущеннях відносно поведінки випадкової величини u у класичній лінійній регресії, можна розрахувати точність окремих оцінок і перейти від точкового до інтервального прогнозу, тобто до розрахунку його довірчого інтервалу. Нажаль імовірність прогнозу залежить від реальності припущень відносно розподілу випадкової змінної u . Якість прогнозу тим вища, чим: повніше виконуються допущення моделі в прогнозний період; надійніше оцінені параметри моделі; точніше визначені значення незалежних змінних для прогнозного часового періоду.

Оскільки для розрахунку прогнозу Y ми користуємося оцінками \hat{A} параметрів A , то випадкова змінна u не може вважатися єдиним джерелом помилки прогнозу. Сукупна помилка прогнозу ε_p складається з двох компонент: одна з них дійсно пов'язана із випадковим змінням помилки u , а друга, ε_m характеризує помилку в моделі для оцінки умовного математичного сподівання $M(Y/X)$.

Алгебраїчно це можна представити як $\varepsilon_p = u + \varepsilon_m$. Дисперсія загальної помилки прогнозу дорівнює суммі дисперсій помилок кожного виду:

$$\sigma_{\varepsilon_p}^2 = \sigma_u^2 + \sigma_m^2.$$

Значення σ_u^2 фіксоване, у той час як σ_m^2 представляє собою функцію від величини X : вона зростає з відхиленням від середнього значення вибірки X . На графіку це проявляється наступним чином: при відхиленні x уверх (або униз) від середнього вибіркового значення лінії, що обмежують область прогнозу, повинні все дужче вигинатися. Таке явище відбувається через зменшення впевненості у тому, що оцінка кутового коефіцієнту прямої a_1 , продовжує характеризувати швидкість змінення y відносно x . На рис. 3.4 показано, що теоретична пряма $\hat{Y}_p = X_p \hat{A}$ проходить через точку, яка дорівнює середнім вибіркоким значенням y та x . У цій точці довірчий інтервал найвужчий, що підтверджує формула оцінки дисперсії помилки прогнозу $\sigma_{\varepsilon_n}^2$ для парної регресії:

$$\sigma_{\varepsilon_n}^2 = \sigma_u^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_{ij}^2} \right).$$

Вона зростає з віддаленням значення x_p , від відповідного середнього значення вибірки.

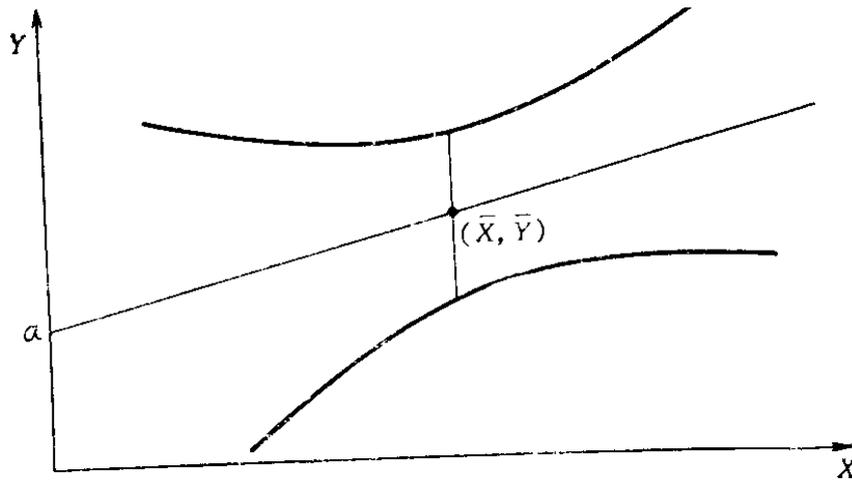


Рис.3.4. Довірчий інтервал для середнього прогнозу.

Візьмемо точку майбутнього періоду $p > n$, де $i = \overline{1, n}$ буде базовим (оціночним) часовим періодом і розглянемо значення $Y_p = \hat{Y}_p + \varepsilon_p = X_p \hat{A} + \varepsilon_p$, де ε_p - помилка прогнозу.

Прогноз математичного сподівання $M(Y_p)$ (середній прогноз).

При оцінюванні математичного сподівання прогнозу $M(\hat{Y}_p)$ помилку прогноза ε_p і її дисперсію розраховуємо як

$$\varepsilon_p = M(Y_p) - \hat{Y}_p = M(Y_p) - X_p \hat{A}.$$

Оскільки, помилка прогнозу ε_p є лінійною функцією нормально-розподіленої змінної \hat{A} , то можна записати, що $\varepsilon_p \approx N\{M(Y_p) - X_p \hat{A}; X_p' \sigma_u^2 (X'X)^{-1} X_p\}$. Тобто математичне сподівання дорівнює нулю ($M(Y_p) = X_p \hat{A}$), а дисперсія прогнозу дорівнює

$$\sigma_{\varepsilon_p}^2 = X_p' \sigma_u^2 (X'X)^{-1} X_p$$

Середньо квадратична помилка прогнозу

$$\sigma_p = (\sigma_{\varepsilon_p}^2)^{1/2}$$

Помилка прогнозу для індивідуального значення y_p залежної змінної Y дорівнює

$$\varepsilon(i)_p = y_p - \hat{y}_p = y_p - X_p \hat{A},$$

де i - вказує на індивідуальне значення прогнозу; y_p - реалізація випадкової величини y_p , яка має таку ж саму дисперсію, що і змінна u , а саме σ_u^2 .

Компонента \hat{y}_p має дисперсію $\sigma_{\varepsilon_p}^2$. Отже, оцінка дисперсії помилки індивідуального прогнозу дорівнює

$$\hat{\sigma}_{p(i)}^2 = \hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon_p}^2 = \hat{\sigma}_u^2 + \hat{\sigma}_u^2 X'_p (X'X)^{-1} X_p = \hat{\sigma}_u^2 (1 + X'_p (X'X)^{-1} X_p).$$

Відповідно середньоквадратична помилка індивідуального прогнозу

$$\sigma_{p(i)} = \sqrt{\sigma_{s(i)p}^2},$$

Інтервальний прогноз індивідуального значення визначається як

$$\hat{Y}_0 - t_\alpha \hat{\sigma}_{n(i)} \leq Y_0 \leq \hat{Y}_0 + t_\alpha \hat{\sigma}_{n(i)}$$

або

$$\hat{Y}_p - t_\alpha \hat{\sigma}_u \sqrt{1 + X'_p (X'X)^{-1} X_p} \leq Y_p \leq \hat{Y}_p + t_\alpha \hat{\sigma}_u \sqrt{1 + X'_p (X'X)^{-1} X_p}.$$

Приклад 3.3. Розрахувати для економетричної моделі (приклад 3.2) точковий та інтервальний прогнози математичного сподівання і індивідуального значення залежної змінної, коли для прогнозного періоду відомий вектор

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

1. Визначаємо точкові прогнозні значення залежної змінної, коли

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix}:$$

$$\hat{Y} = 8,8 + 0,2x_1 + 6,97x_2 = 8,8 + 0,2 \cdot 500 + 6,97 \cdot 6 = 150,62.$$

Отже, $M(y_0)$ можна інтерпретувати як оцінку прогнозного значення математичного сподівання та індивідуального значення витрат на харчування, коли відомі загальні витрати x_1 і розмір сім'ї становить x_2 .

2. Визначаємо прогнозний інтервал математичного сподівання $M(y_0)$.

Знайдемо

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_u^2 &= \hat{\sigma}_u^2 X'_p (X'X)^{-1} X_p = X'_p \text{var}(\hat{A}) X_p = \\ &= (1 \ 500 \ 6) \begin{pmatrix} 21,64 & -0,0118 & -3,0738 \\ -0,0118 & 0,00207 & -0,00827 \\ -3,0738 & -0,00827 & 1,137 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix} = \\ &= (-2,703 \ 0,9736 \ -0,3868) \begin{pmatrix} 1 \\ 500 \\ 6 \end{pmatrix} = 481,777. \end{aligned}$$

Стандартна помилка прогнозу математичного сподівання $M(y_0)$:

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma_n^2} = \sqrt{481,777} = 21,95;$$

3. Визначаємо інтервальний прогноз для $M(y_0)$. При цьому нехай $\alpha = 0,05$ і $n - m = 13$; тоді $t_{0,05} = 2,160$.

Отже,

$$\hat{Y}_0 - t_\alpha \hat{\sigma}_{n(i)} \leq Y_0 \leq \hat{Y}_0 + t_\alpha \hat{\sigma}_{n(i)}$$

і

$$150,62 - 2,160 \cdot 21,95 \leq M(y_0) \leq 150,62 + 2,160 \cdot 21,95;$$

$$103,208 \leq M(y_0) \leq 198,032.$$

4. Обчислюємо дисперсію і стандартну помилку прогнозу індивідуального значення y_0 :

$$\sigma_{n(i)}^2 = \sigma_n^2 + \sigma_u^2 = 481,777 + 68,92 = 550,697.$$

Стандартна помилка прогнозу індивідуального значення y_0 така:

$$\sigma_{n(i)} = \sqrt{\sigma_{n(i)}^2} = \sqrt{550,697} = 23,467.$$

5. Визначаємо інтервальний прогноз індивідуального значення y_0 :

$$\hat{Y}_0 - t_\alpha \hat{\sigma}_{n(i)} \leq Y_0 \leq \hat{Y}_0 + t_\alpha \hat{\sigma}_{n(i)};$$

$$150,62 - 2,160 \cdot 23,467 \leq Y_0 \leq 150,62 + 2,160 \cdot 23,467;$$

$$99,931 \leq Y_0 \leq 201,309.$$

Значення t_α знаходимо в таблиці при $\alpha = 0,05$ і ступені свободи $\nu = 13$. У такому разі $t_{0,05} = 2,160$.

Отже, з імовірністю $p = 0,95$ ($\alpha = 0,05$) прогноз математичного сподівання $M(y_0)$ потрапляє в інтервал $[103,208; 198,032]$, а прогноз індивідуального значення в інтервал $[99,931; 201,309]$.

Можна також сказати, що з імовірністю $p = 0,95$ знайдені прогнози покривають $M(y_0)$ і y_0 , коли взяти досить велику кількість вибірок і для кожної з них обчислювати інтервальні прогнози.

Економічна інтерпретація: якщо в прогнозному періоді загальні витрати мають рівень 500 одиниць, а сім'я складається з шести осіб, то середні витрати на харчування потрапляють в інтервал

$$103,208 \leq M(y_0) \leq 198,032.$$

Водночас окреме (індивідуальне) значення цих витрат міститиметься в ширшому інтервалі, а саме

$$99,931 \leq Y_0 \leq 201,309.$$

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. З яких елементів складається математична модель?
2. Назвіть типи математичних моделей. Чим вони різняться між собою?
3. Як записується економетрична модель у загальному вигляді для фактичних даних та який її склад?

4. Які змінні у моделі є залежними і незалежними? Чому вони називаються пояснювальними?
5. Запишіть оператор оцінювання 1МНК. Як його можна дістати?
6. З яких причин у модель фактичних даних вводиться випадкова складова (залишки)?
7. Які етапи побудови економетричної моделі?
8. Яка задача вирішується в регресійному аналізі?
9. Яка задача вирішується в кореляційному аналізі?
10. Що означає специфікація моделі?
11. Що приводить до помилок специфікації?
12. Між якими змінними встановлює зв'язок рівняння парної регресії?
13. Пояснити отримання системи нормальних рівнянь при застосуванні 1МНК.
14. Як обчислити матрицю коваріацій параметрів моделей?
15. Як визначити зміщення оцінки 1МНК?
16. Запишіть формулу визначення дисперсії залишків.
17. Що означає обґрунтованість оцінки?
18. Як визначити ефективність оцінки?
19. Що означає інтервальний прогноз?
20. Що означає точковий прогноз?
21. Побудувати економетричну модель за даними, наведеними в таблицях 1-2. Оцінити параметри моделі. Зробити економічні висновки.

Таблиця 1.

№ магазину	1	2	3	4	5	6	7
Частка продовольчих товарів у товарообігу, %	74,2	73,5	77,0	84,3	67,3	70,1	83,1
Рівень рентабельності, %	3,62	3,80	2,77	2,12	4,33	4,01	2,01

Таблиця 2.

№ робітника	1	2	3	4	5	6	7
Стаж роботи, років	1	3	4	2	5	7	8
Виробітка 1 робітника за зміну, шт.	80	90	120	100	110	150	160

Розділ 4. ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ

4.1. Побудова та аналіз загальної економетричної моделі на основі покрокової регресії

Оцінювання параметрів економетричної моделі та її дисперсійний аналіз становлять загальний процес побудови моделі. Поєднання цих частин зумовило

появу альтернативного методу оцінювання параметрів моделі 1МНК, яка базується на елементах дисперсійного аналізу.

Між оцінками параметрів економетричної моделі та коефіцієнтом кореляції, що характеризує тісноту зв'язку, існує зв'язок. Для простої економетричної моделі його можна записати так:

$$\hat{a}_1 = r_{yx} \frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

де r_{yx} - парний коефіцієнт кореляції між Y та X ; де \hat{a}_j – оцінка коефіцієнта a_j ; σ_y - середньоквадратичне відхилення залежної змінної, σ_x - середньоквадратичне відхилення незалежної змінної.

Отже, оцінка параметрів моделі прямо пропорційна до коефіцієнта парної кореляції. Аналогічні співвідношення виконуються і в загальному випадку. А це означає, що оцінити параметри моделі можна через коефіцієнти кореляції: спочатку оцінити тісноту зв'язку між кожною парою змінних, а потім знайти оцінки параметрів економетричної моделі.

Залежність оцінок параметрів економетричної моделі й коефіцієнтів парної кореляції покладено в основу алгоритму *покрокової регресії*.

Опишемо цей алгоритм.

Крок 1. Усі вхідні дані змінних стандартизують (нормалізують):

$$y^* = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}; \quad x_j^* = \frac{x_j - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}}. \quad (4.1)$$

де y^* – нормалізована залежна змінна; x_j^* - нормалізовані незалежні змінні; \bar{x}_j - середнє значення j -ї незалежної змінної; σ_y , σ_x – середньоквадратичні відхилення.

При цьому середні значення \bar{y}^* і \bar{x}_j^* , дорівнюють нулю, а дисперсії – одиниці.

Крок 2. Знаходять кореляційну матрицю (матриця парних коефіцієнтів кореляції):

$$r^* = \begin{pmatrix} r_{yy} & r_{yx_1} & r_{yx_2} & r_{yx_3} & \dots & r_{yx_m} \\ r_{x_1y} & r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & \dots & r_{x_1x_m} \\ r_{x_2y} & r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & r_{x_2x_3} & \dots & r_{x_2x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_my} & r_{x_mx_1} & r_{x_mx_2} & r_{x_mx_3} & \dots & r_{x_mx_m} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

де r_{yx_j} - парні коефіцієнти кореляції між залежною і незалежними змінними:

$$r_{yx_j} = \frac{1}{n} y^{*'} x_j^*,$$

де n – кількість спостережень; $r_{x_k x_j}$ – парні коефіцієнти кореляції між незалежними змінними:

$$r_{x_k x_j} = \frac{1}{n} x_k^* x_j^*.$$

Крок 3. На підставі порівняння абсолютних значень r_{yx_j} вибирають $\max\{r_{yx_j}\}$. Це означає, на ту незалежну змінну, яка найтісніше пов'язана з залежною змінною. З допомогою 1МНК знаходять оцінку параметрів цієї моделі:

$$\hat{y}^* = \hat{\beta} x_j^*, \quad (4.3)$$

де $\hat{\beta}$ – оцінки параметрів моделі, яка будується на основі нормалізованих даних.

Крок 4. Серед тих, що залишилися, значень r_{yx_j} вибирається $\max\{r_{yx_j}\}$ і в модель вводиться наступна незалежна змінна x_e

$$\hat{y}^* = \hat{\beta}_1 x_j^* + \hat{\beta}_2 x_e^*$$

і. т. д.

Якщо немає обмеження на введення в економетричну модель кожної наступної незалежної змінної, то обчислення виконуються доти, поки поступово не будуть введені в модель усі змінні.

Система нормальних рівнянь для визначення оцінок параметрів моделі 1МНК на основі стандартизованої моделі запишеться так:

$$\begin{cases} r_{yx_1} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 r_{x_2 x_1} + \hat{\beta}_3 r_{x_3 x_1} + \dots + \hat{\beta}_m r_{x_m x_1}; \\ r_{yx_2} = \hat{\beta}_1 r_{x_1 x_2} + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 r_{x_3 x_2} + \dots + \hat{\beta}_m r_{x_m x_2}; \\ r_{yx_3} = \hat{\beta}_1 r_{x_1 x_3} + \hat{\beta}_2 r_{x_2 x_3} + \hat{\beta}_3 + \dots + \hat{\beta}_m r_{x_m x_3}; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ r_{yx_m} = \hat{\beta}_1 r_{x_1 x_m} + \hat{\beta}_2 r_{x_2 x_m} + \hat{\beta}_3 r_{x_3 x_m} + \dots + \hat{\beta}_m; \end{cases}$$

або в матричному вигляді:

$$\hat{\beta} r = r_{xy} \quad (4.4)$$

Звідси оператор оцінювання параметрів моделі:

$$\hat{\beta} = r^{-1} r_{xy}, \quad (4.5)$$

де $\hat{\beta}$ – оцінки параметрів моделі у стандартизованому вигляді.

Оскільки всі змінні нормалізовані, то параметри $\hat{\beta}_j$ показують порівняльну силу впливу кожної незалежної змінної на залежну: чим більше за модулем значення параметра $\hat{\beta}_j$, тим сильніше впливає j -та змінна на результат.

Зв'язок між оцінками параметрів моделі на основі стандартизованих і нестандартизованих змінних запишеться у вигляді:

$$a_j = \beta_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}}, (j = \overline{1, m}), \quad a_0 = \bar{y} - \sum_j \hat{a}_j \bar{x}_j. \quad (4.6)$$

Приклад 4.1. Для десяти цехів машинобудівного підприємства наведено такі дані (табл. 4.1.).

Побудуємо економетричну модель, яка описуватиме зв'язок продуктивності праці з наведеними чинниками згідно з алгоритмом покрокової регресії.

Таблиця 4.1.

Номер цеху	Середньомісячна зарплата, ум. од. y	Продуктивність праці, ум. од. x_1	Фондомісткість продукції, ум. од. x_2	Виконання норми вироботку, % x_3
1	45	265	0,20	130
2	42	236	2,04	127
3	50	257	0,30	151
4	55	279	0,20	149
5	40	226	0,10	140
6	70	350	0,10	141
7	56	278	0,25	152
8	57	262	0,03	188
9	55	269	0,15	120
10	53	250	0,32	126

Запишемо кореляційну матрицю для цих даних:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0,90 & 0,03 & 0,28 \\ 0,90 & 1 & -0,03 & 0,10 \\ 0,03 & -0,03 & 1 & -0,24 \\ 0,28 & 0,10 & -0,24 & 1 \end{pmatrix}.$$

Із матриці бачимо, що діагональні її елементи дорівнюють одиниці, бо вони характеризують зв'язок кожної змінної із собою. Ця матриця квадратна і симетрична.

У першому рядку містяться коефіцієнти парної кореляції, що характеризують тісноту зв'язку кожної змінної з продуктивністю праці.

Так,

$$r_{yx_1} = 0,9; \quad r_{yx_2} = 0,03; \quad r_{yx_3} = 0,28,$$

де y – продуктивність праці; x_1 – зарплата; x_2 – фондомісткість продукції; x_3 – % виконання норми виробітку.

Оскільки серед величин максимальне значення $r_{yx_1} = 0,9$, то спочатку будуватиметься модель: $y = \beta_1 x_1$. Порівнявши потім інші два коефіцієнти: $\max\{r_{yx_2} = 0,03; r_{yx_3} = 0,28\} = 0,28$, введемо до моделі змінну x_3 :

$$y = \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_3 x_3$$

і, нарешті, $y = \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_3 x_3 + \hat{\beta}_2 x_2$.

Далі, використовуючи співвідношення (6), обчислимо оцінки параметрів моделі для вихідної ненормалізованої інформації.

У результаті дістанемо такі регресійні рівняння зв'язку:

- 1) $\hat{y} = -9,77 + 0,23x_1$;
- 2) $\hat{y} = -20,63 + 0,23x_1 + 0,09x_3$;
- 3) $\hat{y} = -23,83 + 0,23x_1 + 0,10x_3 + 9,02x_2$.

4.2. Множинний коефіцієнт кореляції і детермінації

Тісноту зв'язку загального впливу всіх незалежних змінних на залежну визначається коефіцієнтами детермінації і множинної кореляції.

Щоб дати метод їх розрахунку необхідно показати, що варіація залежної змінної (Y) навколо свого вибіркового середнього значення (\bar{Y}) може бути розкладена на дві складові:

- 1) варіацією розрахункових значень (\hat{Y}) навколо середнього значення (\bar{Y});
- 2) варіацією розрахункових значень (\hat{Y}) навколо фактичних (Y).

Необхідні при цьому обчислення зведемо в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Джерело варіації	Сума квадратів відхилень	Ступені свободи	Середнє квадратів відхилень або дисперсія
x_1, x_2, \dots, x_m	$\sum_{i=1}^n (\hat{Y} - \bar{Y})^2 = \hat{A}'X'Y$	$m-1$	$\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y} - \bar{Y})^2}{m-1} = \frac{A'X'Y}{m-1} = \sigma_p^2$
Залишок u	$\sum_{i=1}^n (Y - \hat{Y})^2 = u'u$	$n-m$	$\frac{\sum_{i=1}^n (Y - \hat{Y})^2}{n-m} = \frac{u'u}{n-m} = \sigma_u^2$
Загальна варіація	$\sum_{i=1}^n (Y - \bar{Y})^2 = Y'Y$	$n-1$	$\frac{\sum_{i=1}^n (Y - \bar{Y})^2}{n-1} = \frac{Y'Y}{n-1} = \sigma_y^2$

Зауважимо, що всі змінні Y і X взяті як відхилення від свого середнього значення.

Використаємо середні квадратів відхилень (дисперсії) (див. табл. 4.2) і запишемо формулу для обчислення коефіцієнта детермінації:

$$R^2 = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_u^2}{\sigma_y^2} = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_y^2} \Rightarrow \frac{\hat{A}'X'Y}{m-1} : \frac{Y'Y}{n-1} = \frac{\hat{A}'X'Y}{Y'Y} \cdot \frac{n-1}{m-1}, \quad (4.7)$$

або, не враховуючи ступенів свободи:

$$R^2 = \frac{\hat{A}'XY}{Y'Y}. \quad (4.8)$$

Оскільки у (4.7) задані незміщені оцінки дисперсії з урахуванням числа ступенів свободи, то коефіцієнт детермінації може зменшуватись при введенні в модель нових незалежних змінних. Тоді як для коефіцієнта детермінації, обчисленого без урахування поправки $(n-1/m-1)$ на число ступенів свободи (4.8), коефіцієнт детермінації ніколи не зменшується. Залежність між цими двома коефіцієнтами можна подати так:

$$R^2 = \left(1 - \frac{n-1}{n-m}\right) (1 - \bar{R}^2), \quad (4.9)$$

де R^2 – коефіцієнт детермінації з урахуванням числа ступенів свободи; \bar{R}^2 – коефіцієнт детермінації без урахування числа ступенів свободи.

Для функції з двома і більше незалежними змінними коефіцієнт детермінації може набувати значень на множині $\bar{R}^2 \in]0,1[$. Числове значення коефіцієнта детермінації характеризує, якою мірою варіація залежної змінної (Y) визначається варіацією незалежних змінних. Чим ближчий він до одиниці, тим більше варіація залежної змінної визначається варіацією незалежних змінних.

Множинний коефіцієнт кореляції:

$$R = \sqrt{R^2}.$$

Він характеризує тісноту зв'язку всіх незалежних змінних із залежною.

Для множинного коефіцієнта кореляції з урахуванням і без урахування числа ступенів свободи характерна така сама зміна числового значення, як і для коефіцієнта детермінації.

Приклад 4.2. Порівняємо коефіцієнти кореляції і детермінації для різних економетричних моделей, побудованих для вихідних даних, наведених у табл. 4.3., на основі покрокової регресії.

Таблиця 4.3.

Економетрична модель	\bar{R}^2	R^2 з урахуванням числа ступенів свободи	\bar{R}	R з урахуванням числа ступенів свободи
$\hat{y} = -9,77 + 0,23x_1$	0,811	0,811	0,900	0,900
$\hat{y} = -20,63 + 0,23x_1 + 0,09x_3$	0,847	0,828	0,921	0,910
$\hat{y} = -23,83 + 0,23x_1 + 0,10x_3 + 9,02x_2$	0,857	0,817	0,926	0,904

З табл.4.3. бачимо, що з додатковим введенням нової незалежної змінної коефіцієнти детермінації \bar{R}^2 і кореляції R без урахування числа ступенів

свободи збільшуються, ці самі характеристики з урахуванням числа ступенів свободи для другої моделі, яка має дві незалежні змінні, зростають, а для третьої – з трьома незалежними змінними – вони спадають. Тобто для третьої моделі в результаті введення додаткової змінної зменшення величини $1 - R^2$ не зможе компенсувати збільшення відношення $(n - 1/n - m)$. Зауважимо при цьому, що коефіцієнти детермінації і кореляції без урахування числа ступенів свободи мають більші числові значення, ніж з урахуванням цього числа.

Розглянемо альтернативний спосіб обчислення коефіцієнтів детермінації і кореляції, коли система нормальних рівнянь будується на основі коефіцієнтів парної кореляції r .

У такому разі оцінку параметрів моделі можна записати:

$$\hat{a}_j = \frac{\hat{\sigma}_y}{\hat{\sigma}_{x_j}} \cdot \frac{R_{1j}}{R_{11}},$$

де R_{kj} - алгебраїчне доповнення матриці r до елемента r_{kj} .

Сума квадратів відхилень (залишків) також може бути виражена через алгебраїчне доповнення матриці r :

$$\sum_{i=1}^n u^2 = \frac{n\hat{\sigma}_y^2 |r|}{R_{11}},$$

де $|r|$ - визначник кореляційної матриці. А це, у свою чергу, дає нам альтернативний вираз для коефіцієнта детермінації:

$$R^2 = 1 - \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\sigma}_y^2} = 1 - \frac{|r|}{R_{11}}.$$

Ще один альтернативний метод розрахунку коефіцієнтів детермінації на основі матриці r можна подати у вигляді

$$R^2 = \hat{\beta}_1 r_{yx_1} + \hat{\beta}_2 r_{yx_2} + \dots + \hat{\beta}_m r_{yx_m}.$$

Звідси коефіцієнт кореляції

$$R^2 = \sqrt{\hat{\beta}_1 r_{yx_1} + \hat{\beta}_2 r_{yx_2} + \dots + \hat{\beta}_m r_{yx_m}}.$$

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Схарактеризуйте алгоритм покрокової регресії.
2. Чим відрізняються коефіцієнти парної та часткової кореляції?
3. Запишіть співвідношення між коефіцієнтами кореляції і детермінації.
4. Як визначаються дисперсія залишків, загальна дисперсія і дисперсія регресії? Який між ними зв'язок?
5. Як визначається F -критерій? Для чого він застосовується?
6. Покажіть залежність між F -критерієм і R^2 .
7. Як оцінити достовірність коефіцієнта кореляції?

8. Доведіть, чому для визначення значущості параметрів моделі можна застосувати t -критерій?
9. Як обчислюється t -критерій?
10. Що таке стандартна помилка оцінок параметрів моделі.
11. Як визначити довірчі інтервали для параметрів моделі?

Розділ 5. МУЛЬТИКОЛІНЕАРНІСТЬ

5.1. Визначення мультиколінеарності та її природа

Термін "мультиколінеарність" означає, що в багатофакторній регресійній моделі дві або більше незалежних змінних (факторів) пов'язані між собою лінійною залежністю або, іншими словами, мають високий ступінь кореляції. Однією з умов класичної лінійної регресії є припущення про відсутність мультиколінеарності між факторами x .

Наприклад, мультиколінеарність може бути проблемою, коли ми вивчаємо залежність між ціною акції, дивідендами на акцію та заробленим прибутком на акцію, оскільки дивіденди та зароблений прибуток на одну акцію мають високий ступінь кореляції. Те ж саме можна сказати і про фактори доходу та ціни, які є пояснюючими в функції попиту. Мультиколінеарність може виникати за різних умов.

По-перше, деякі показники діють в унісон. Наприклад, на макроекономічні показники впливають однакові фактори. Це приводить до того, що вони відображають широкий спектр моделей однакової економічної ситуації. У період бумів або швидкого економічного зростання базові економічні показники також зростають, звичайно, з деяким лагом. Такі показники, як дохід, споживання, накопичення, інвестиції, ціни, зайнятість мають тенденцію до зростання в період економічної експансії і до спаду в період рецесії. Сама наявність трендів у динамічних рядах є причиною мультиколінеарності. Якщо два колінеарні фактори змінюються в одному напрямі, то майже неможливо оцінити окремий вплив кожного з них на досліджуваний показник y .

По-друге, широке використання в економетричних моделях лагових значень однієї змінної також призводить до виникнення мультиколінеарності. Наприклад, добре відомі інвестиційні функції, в яких лагові значення минулого рівня економічної активності вводяться як окремі змінні. У функціях споживання витрати на споживання у попередньому періоді вводяться в модель поряд з величиною поточного рівня доходу.

Таким чином, зрозуміло, що в економіці взагалі важко уникнути певного рівня залежності між показниками, тобто певного рівня колінеарності. Однією з умов класичної лінійної регресії є припущення про відсутність мультиколінеарності між факторами x .

5.2. Наслідки мультиколінеарності

До яких же наслідків може привести мультиколінеарність? Це одне з найважливіших питань, яке потрібно зрозуміти при розробці економетричних моделей. Перш за все потрібно відрізнити *досконалу* кореляцію від *недосконалої*.

Спочатку мультиколінеарність розглядали як наявність досконалої кореляції ($r_{x_i x_j} = 1$). Сам термін "мультиколінеарність" вперше було введено Р.Фрішем.

Якщо ми розглянемо багатофакторну модель з k факторами, то досконалий лінійний зв'язок між x_1, x_2, \dots, x_k має місце, коли виконується така умова:

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k = 0 \quad (5.1)$$

де не всі b_j ($j = \overline{1, k}$) одночасно дорівнюють нулю.

Проте сьогодні "мультиколінеарність" має ширше значення і включає випадок не тільки досконалої кореляції, а й випадок, коли фактори $x_j, j = \overline{1, k}$ корелюють між собою (проте недосконало). Тобто є залежність:

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k + e = 0 \quad (5.2)$$

де e - випадкова величина (помилка).

Різницю між досконалою і недосконалою мультиколінеарністю розглянемо для випадку, коли, наприклад, $b_2 \neq 0$. Вираз (5.1) можна тоді переписати таким чином:

$$x_{2i} = -\left(\frac{b_1}{b_2}\right)x_{1i} - \left(\frac{b_3}{b_2}\right)x_{3i} - \dots - \left(\frac{b_k}{b_2}\right)x_{ki}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5.3)$$

Фактор x_2 є лінійною комбінацією інших факторів. Аналогічно, вираз (5.2) можна записати:

$$x_{2i} = -\left(\frac{b_1}{b_2}\right)x_{1i} - \left(\frac{b_3}{b_2}\right)x_{3i} - \dots - \left(\frac{b_k}{b_2}\right)x_{ki} - \left(\frac{1}{b_2}\right)e, \quad j = \overline{1, n} \quad (5.4)$$

Із (5.4) зрозуміло, що змінна x_2 не є точною лінійною комбінацією інших факторів, бо залежить також від випадкової величини e .

Чому для класичної лінійної моделі вимогою одного з припущень є відсутність мультиколінеарності між її факторами? Тому, що у випадку досконалої мультиколінеарності параметри регресії стають невизначеними, а їхні середні квадратичні відхилення прямують до нескінченності.

Покажемо це на наступному прикладі. Припустимо, що ми розглядаємо залежність національного доходу (Y) від випуску промислових товарів (X_1) та товарів тривалого користування (X_2) за період часу t . Економетрична модель має наступний вигляд

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u, \quad (5.5)$$

або з центрованими даними:

$$Y - \bar{Y} = \beta_1(X_1 - \bar{X}_1) + \beta_2(X_2 - \bar{X}_2) + u, \quad (5.6)$$

Між пояснюючими змінними x_1 та x_2 існує точна лінійна залежність

$$X_1 = mX_2 \quad (5.7)$$

Для визначення оцінок параметрів центрованої моделі методом найменших квадратів потрібно розв'язати наступну систему нормальних рівнянь:

$$S_{11}b_1 + S_{12}b_2 = S_{yx1}; \quad (5.8)$$

$$S_{12}b_1 + S_{22}b_2 = S_{yx2}.$$

S_{YX_j} означає суми квадратів та добутки відхилень змінних X_i та X_j від їх арифметичних середніх. Відповідно, S_{YX_j} означає добутки відхилень змінних Y та X_j від їх арифметичних середніх.

Через лінійне співвідношення (5.7) між X_1 та X_2 буде

$$S_{11} = m^2 S_{22}; S_{12} = mS_{22} \quad (5.9)$$

Тому матриця системи нормальних рівнянь (5.8) виглядає так:

$$\begin{bmatrix} m^2 S_{22} & mS_{22} \\ mS_{22} & S_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

і її визначник

$$\begin{bmatrix} m^2 S_{22} & mS_{22} \\ mS_{22} & S_{22} \end{bmatrix} = 0. \quad (5.11)$$

Неоднорідна лінійна система рівнянь (5.8) не може бути розв'язана, якщо її визначник дорівнює нулю.

Якщо дані мають помилки спостережень, то не буде точного лінійного співвідношення

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k = 0,$$

і виникає недосконала мультиколінеарність. Визначник (5.11) буде не нулем, а лише малим числом. В цьому випадку система нормальних рівнянь (5.8) буде мати розв'язок. Але розв'язок буде залежати від помилок спостережень і не матиме економічного значення. Отже, якщо мультиколінеарність велика, але не досконала, визначити параметри регресії можна, але їхні середньоквадратичні відхилення будуть дуже великими. Як наслідок, значення параметрів для сукупності не можна визначити точно.

Згадаємо, що за умов класичної моделі МНК-оцінки (оцінки, обчислені за методом найменших квадратів) параметрів регресії є BLUE-оцінками. Навіть при дуже високій, але недосконалій мультиколінеарності МНК-оцінки все ще зберігають властивість BLUE-оцінок.

Тоді чому виникає питання про мультиколінеарність? Звичайно, при побудові моделі навіть в умовах мультиколінеарності можна отримати незміщені та стійкі оцінки. Ефект мультиколінеарності виявляється у тому, що складно отримати значення параметрів з малою стандартною помилкою. Такий самий

ефект спостерігається при невеликій кількості спостережень або при невеликій зміні значень. З точки зору теорії, мультиколінеарність та невелика кількість змінних - це одна і та сама проблема. Тому теоретично питання "Що робити з мультиколінеарністю?" збігається з питанням "Що робити, якщо в мене мало спостережень?" Але фактично проблема мультиколінеарності так часто виникає в емпіричних дослідженнях та створює такі серйозні проблеми оцінювання, що розглядати її тільки як порушення припущення моделі класичної лінійної регресії неможливо.

5.3. Теоретичні наслідки мультиколінеарності

По перше, справедливе твердження, що навіть у разі високої мультиколінеарності МНК-оцінки є незміщеними. Але незміщеність - це властивість часто повторюваної вибірки. Вона означає, що при постійних значеннях змінних величин x , якщо досліджувати повторювані вибірки та підраховувати МНК-оцінки для кожної з них, середнє значення змінних у цих вибірках прямує до правильних значень параметрів у будь-якій з наведених вибірок.

По-друге, справедливим є також те, що колінеарність не порушує властивостей мінімуму дисперсії: в класі лінійних незміщених оцінок МНК-оцінки мають мінімальну дисперсію, і тому вони ефективні. Однак це не значить, що дисперсія МНК-оцінки буде неминуче малою (відносно значення параметра) в будь-якій з наведених вибірок.

По-третє, мультиколінеарність - явище виключно регресійного аналізу вибірки в тому розумінні, що навіть якщо змінні x пов'язані в генеральній сукупності нелінійно, вони можуть мати лінійний зв'язок у кожному окремому випадку: коли ми постулюємо вибіркову або узагальнену функцію регресії, то впевнені, що всі змінні величини x , які утворюють модель, мають окремий або незалежний вплив на залежну змінну величину y . Однак може так трапитися, що в будь-якій з вибірок, яка використовується для перевірки узагальненої моделі, деякі або всі змінні величини x настільки висококолінеарні, що ми не можемо виявити їхнього індивідуального впливу на y . Наша вибірка, так би мовити, нас підводить, хоча за теорією всі x важливі. Іншими словами, вже неможливо застосувати всі змінні величини x в аналізі.

Проілюструємо це прикладом "споживання — прибуток". Економісти вважають, що важливим фактором у споживанні, окрім прибутку, є також заможність споживача. Таким чином, ми можемо записати:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u_i,$$

де y - споживання, x_1 - доход, x_2 - багатство.

Може так трапитися, що коли ми отримуємо дані про прибуток та багатство, дві змінні величини x_1 та x_2 будуть високо або навіть повністю корельовані між собою. Більш заможні люди здебільшого прагнуть отримувати вищий прибуток.

Таким чином, хоча теоретично прибуток і багатство є логічними кандидатами для з'ясування поведінки споживача, на практиці (тобто у вибірці) важко розібратися в окремих випадках впливу прибутку і багатства на споживання. В ідеальному випадку, щоб визначити індивідуальний вплив багатства і прибутку на споживання, нам потрібна достатня кількість вибірок зі спостереженнями щодо заможних індивідів з низьким прибутком та не дуже заможних людей з високим прибутком. Хоча це можливо теоретично, практично цього дуже важко добитися при проведенні загальних досліджень.

У зв'язку з цим той факт, що МНК-оцінки є BLUE-оцінками, незважаючи на мультиколінеарність, є маловтішним. Ми повинні знати, що відбувається або що може відбутися в кожній окремій вибірці.

5.4. Практичні наслідки мультиколінеарності

Першим, практичним наслідком мультиколінеарності є велика дисперсія і коваріація оцінок параметрів, обчислених за методом найменших квадратів.

Залежність дисперсії і коваріації оцінених параметрів від значень коефіцієнта кореляції графічно зображено на рисунках 5.1 і 5.2.

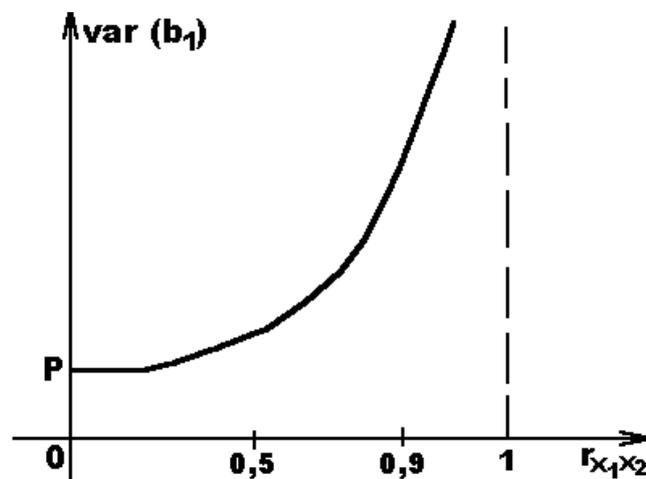


Рис.5.1. Залежність $var(b_1)$ від зростання значення коефіцієнта кореляції

Другим практичним наслідком мультиколінеарності є збільшення інтервалу довіри. Оскільки збільшення коефіцієнта кореляції призводить до збільшення значень середньоквадратичних відхилень параметрів, то, звичайно, збільшується й інтервал довіри для них, що можна побачити з рис.5.2.

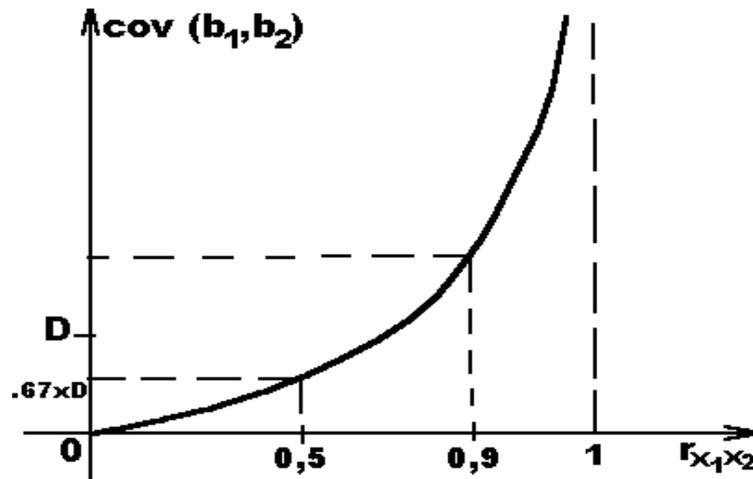


Рис.5.2. Залежність коваріації $cov(b_1, b_2)$ від зростання значення коефіцієнта кореляції.

Так, інтервал довіри за наявності високої мультиколінеарності ($r = 0,999$) в $\sqrt{500}$ разів більший, ніж коли її немає ($r = 0$).

Третім практичним наслідком мультиколінеарності є незначимість t -статистики.

Нагадаємо: для того, щоб оцінити, чи значимо параметри багатofакторної регресії відрізняються від нуля, ми використовуємо t -статистику Ст'юдента. Для цього, наприклад, для параметра b_1 розраховуємо відношення: $t = \frac{b_1}{\hat{\sigma}_{b_1}}$ і порівнюємо його з табличним значенням t . У випадку мультиколінеарності $\hat{\sigma}_{b_1}$ нескінченно зростає, а t -значення прямує до нуля.

Коли мультиколінеарність не є проблемою? Якщо єдиною метою регресійного аналізу є прогноз, тоді мультиколінеарність не викликає проблем, оскільки чим вище значення R^2 , тим точніший прогноз. Це справедливо лише доти, "... доки значення залежних змінних, для яких і здійснюється прогноз, мають однаково майже лінійну залежність з початковою матрицею X ". Таким чином, якщо у побудованій регресії встановлено, що приблизно $x_1 = 2x_2$, то в наступних прикладах прогнозування x_1 повинно приблизно дорівнювати $2x_2$. Ця умова майже нездійсненна на практиці. Більше того, якщо метою аналізу є не прогноз, а дійсні значення параметрів, мультиколінеарність перетворюється на проблему, оскільки вона призводить до великих стандартних помилок в оцінці параметрів. Є випадок, коли мультиколінеарність не переростає в проблему: якщо R^2 велике і параметри регресії є значимими, оскільки t -статистика висока. Коли може виникнути така ситуація? Джонстон зазначає: "Вона може виникнути, якщо оцінки параметрів мають такі числові значення, які "кращі" за правильні значення, так що ефект залишається, незважаючи на підвищення стандартної помилки, і/або тому що правильні значення самі по собі настільки великі, що навіть занижена оцінка залишається значимою".

5.5. Збільшення спостережень

Оскільки мультиколінеарність змінюється у кожній вибірці, то можливо, що в іншій моделі з такими ж змінними мультиколінеарність буде іншою. Іноді просте збільшення спостережень у моделі (якщо це можливо) пом'якшує проблему мультиколінеарності. Наприклад, у моделі з двома незалежними змінними ми бачимо, що

$$\text{var}(b_1) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1 - r_{ij}^2) \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}.$$

Якщо збільшувати кількість спостережень, то $\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2$ завжди збільшуватиметься. Тому для кожного даного коефіцієнта парної кореляції r_{ij} між x_i та x_j дисперсія b_1 буде зменшуватися, зменшуючи таким чином стандартну помилку, що допомагає оцінити β_1 , точніше.

Отримати додаткові дані не завжди легко, оскільки на практиці це часто вимагає значних витрат. Крім того, потрібно впевнитись, що економічна структура, пов'язана з новими спостереженнями, буде подібна до початкової структури.

5.6. Алгоритм Фаррара-Глобера

Найповніше дослідити мультиколінеарність дає змогу алгоритм Фаррара-Глобера, який застосовує три види статистичних критеріїв для виявлення мультиколінеарності:

- χ^2 - («хі»-квадрат), на основі якого перевіряється мультиколінеарність всього масиву незалежних змінних;
- кожної незалежної змінної з усіма іншими (F - критерій);
- кожної пари незалежних змінних (t - критерій).

Порівнявши ці критерії з їх критичними значеннями, можна зробити конкретні висновки щодо наявності чи відсутності мультиколінеарності незалежних змінних. Опишемо цей алгоритм.

Складемо *покроковий алгоритм Фаррара-Глобера*.

Крок 1. Нормалізувати змінні x_1, x_2, \dots, x_m економетричної моделі, обчисливши

$$x_{ij}^* = \frac{(x_{ij} - \bar{x}_j)}{\sqrt{n\sigma_{x_j}^2}}, \quad (5.12)$$

де n - кількість спостережень ($i = \overline{1, n}$); m - незалежних змінних ($j = \overline{1, m}$); \bar{x}_j - середня арифметична j -ї незалежної змінної; $\sigma_{x_j}^2$ - дисперсія j -ї незалежної змінної.

Крок 2. На основі матриці X^* , елементами якої є нормалізовані змінні x_{ij}^* , обчислити кореляційну матрицю (матрицю моментів нормалізованої системи нормальних рівнянь):

$$R = X^{*'} X^* = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

де X^* - матриця нормалізованих незалежних змінних; $X^{*'}$ - матриця транспонована до матриці X^* ; $r_{ij} = r_{x_i x_j}$ - парні коефіцієнти кореляції.

Однак на основі цієї залежності не можна стверджувати, що отриманий зв'язок є явищем мультиколінеарності. Якщо діагональні елементи матриці R не дорівнюють одиниці, то на діагоналі цієї матриці ми проставляємо одиниці, а до решти елементів додаємо різницю між одиницею й значенням діагонального елемента.

Крок 3. Визначити $|R|$ - визначник кореляційної матриці R ; Обчислити критерій χ^2 :

$$\chi^2 = - \left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m + 5) \right] \cdot \ln |R|;$$

Значення цього критерію порівнюється з табличним при $\frac{1}{2}m(m-1)$ ступенях вільності і рівні значущості α . (якщо $\chi_{\text{факт}}^2 > \chi_{\text{таб}}^2$, то в масиві незалежних змінних існує мультиколінеарності).

Крок 4. Визначити матрицю похибок:

$$C = R^{-1} = (X^{*'} X^*)^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix}.$$

Крок 5. Розрахувати F - критерії:

$$F_k = \frac{(c_{kk} - 1)(n - m)}{m - 1},$$

де c_{kk} - діагональні елементи матриці C .

Розраховані значення F_k порівняти з табличним при $(n-m)$ і $(m-1)$ ступенях свободи й рівні значущості α (якщо $F_k > F_{табл}$, то відповідна k -та незалежна змінна мультиколінеарна з іншими);

Крок 6. Знайти часткові коефіцієнти кореляції, які характеризують тісноту зв'язку між двома змінними за умови, що інші змінні $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_m}$ не впливають на цей зв'язок (існування парної мультиколінеарності):

$$r_{kj} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk}c_{jj}}}$$

де c_{kj} – елементи матриці C , що розміщені в k -му рядку і j -му стовпці ($k = \overline{1, m}; j = \overline{1, m}$), c_{kk} і c_{jj} – діагональні елементи матриці C .

Однак якщо порівняти конкретні числові значення часткових і парних коефіцієнтів, то можна побачити, що перші значно менші, ніж останні. Тому на основі знання парних коефіцієнтів кореляції висновок про мультиколінеарність робити неможливо. Для цього необхідно виконати 7-й крок.

Крок 7. Розрахувати t -критерії:

$$t_{kj} = |r_{kj}| \cdot \frac{\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{kj}^2}};$$

Фактичні значення критеріїв t_{kj} порівняти з табличними при $(m-n)$ ступенях свободи та рівні значущості α ; якщо $t_{kj} > t_{табл}$, то між незалежними змінними x_k і x_j існує мультиколінеарність.

Висновки:

1. Між незалежними змінними може існувати лінійна залежність, однак вона може й не бути явищем мультиколінеарності змінних, а тому не впливатиме на кількісні оцінки параметрів моделі, розрахованих за допомогою звичайного МНК.

2. Якщо $F_k > F_{табл}$, то x_k залежить від усіх інших незалежних змінних і треба вирішити питання про її виключення з переліку змінних.

3. Якщо $t_{kj} > t_{табл}$, то x_k і x_j щільно пов'язані між собою.

4. Аналізуючи F - і t - критерії, робимо висновок, яку зі змінних треба виключити з моделі (зрозуміло, якщо це можливо з економіко-логіко-теоретичних міркувань).

5. Якщо виконавши пп. 2-4, ми не досягли мети, тобто не усунули мультиколінеарність, оцінку параметрів моделі слід обчислювати за допомогою іншого методу, наприклад методу головних компонентів (або однієї з його модифікацій).

Приклад дослідження наявності мультиколінеарності на основі алгоритму Фаррара-Глобера

Приклад 5.1. Розглянемо дослідження впливу на економічний показник y - реальне споживання країни (у млрд. грн.) трьох факторів: x_1 - купівлі та оплати товарів і послуг (у млрд. грн.), x_2 - усіх заощаджень від загального грошового доходу (у % від загальної суми доходу), x_3 - рівня ставки ПДВ (у %). Необхідно перевірити фактори на мультиколінеарність.

№ п/п	$y(i)$	$x_1(i)$	$x_2(i)$	$x_3(i)$
1	25,74	4,69	11,97	29,23
2	25,34	5,64	13,43	29,35
3	31,26	6,26	12,92	33,40
4	33,50	6,99	14,74	30,97
5	32,30	6,36	14,64	32,92
6	38,90	7,60	17,10	37,27
7	41,58	7,12	15,63	30,97
8	48,02	6,81	15,35	33,58
9	43,30	8,67	15,85	35,62
10	51,78	7,83	18,05	34,99
11	52,14	7,84	17,24	39,34
12	54,94	8,85	20,52	41,50
13	59,18	9,61	19,18	45,58
14	62,22	10,67	19,03	41,08
15	63,62	11,04	21,45	40,54
16	65,01	11,85	22,25	42,75
17	67,78	12,94	24,75	43,89
18	71,45	14,24	25,03	41,95
19	75,24	15,67	27,87	44,06
20	77,38	16,33	30,486	46,77

Розв'язання.

Крок 1. Нормалізуємо змінні x_1, x_2, x_3 економетричної моделі, обчисливши

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sqrt{n\sigma_{x_j}^2}},$$

де $n = 20$ - кількість спостережень ($i = \overline{1, n}; m = 3$) - кількість незалежних змінних ($j = \overline{1, m}$); \bar{x}_j - середня арифметична j -ї незалежної змінної:

$$\bar{x}_1 = 9,3505; \bar{x}_2 = 18,874; \bar{x}_3 = 37,788;$$

$\sigma_{x_j}^2$ - дисперсія j -ї незалежної змінної:

$$\sigma_{x_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}{n} = 11,35297; \sigma_{x_2}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_{i2} - \bar{x}_2)^2}{n} = 26,06648;$$

$$\sigma_{x_3}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_{i3} - \bar{x}_3)^2}{n} = 31,86169.$$

Крок 2. На основі нової матриці X^* , елементами якої є нормалізовані незалежні змінні x_{ij}^* ,

$$X^* = \begin{pmatrix} 0,309287 & -0,302374 & 0,339018 \\ 0,246242 & -0,238430 & 0,334264 \\ 0,205096 & -0,260766 & 0,173826 \\ 0,156651 & -0,181056 & 0,270089 \\ 0,198460 & -0,185436 & 0,192841 \\ 0,116169 & -0,077695 & 0,020520 \\ 0,148024 & -0,142077 & 0,270089 \\ 0,168596 & -0,154340 & 0,166696 \\ 0,045160 & -0,132441 & 0,085883 \\ -0,100905 & -0,036088 & 0,110840 \\ -0,100242 & -0,071564 & 0,061481 \\ -0,033215 & 0,072089 & 0,147047 \\ 0,017221 & 0,013401 & 0,308673 \\ 0,087566 & 0,006832 & 0,130409 \\ 0,112121 & 0,112820 & 0,109018 \\ 0,165875 & 0,147858 & 0,196565 \\ 0,238212 & 0,257350 & 0,241725 \\ 0,324485 & 0,269613 & 0,164874 \\ 0,419385 & 0,393997 & 0,248460 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо кореляційну матрицю (матрицю моментів нормалізованої системи нормальних рівнянь):

$$R = X^{*'} X^* = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,92883 & 0,819534 \\ 0,92883 & 0,95 & 0,831277 \\ 0,81953 & 0,83127 & 0,95 \end{pmatrix},$$

де X^* – матриця нормалізованих незалежних змінних; $X^{*'} – матриця$
транспонована до матриці X^* ; елементи матриці R характеризують щільність
зв'язку однієї незалежної змінної з іншою ($r_{ij} = r_{x_i x_j}$ - парні коефіцієнти кореляції).

Крок 3. Визначимо $|R|$ -визначник кореляційної матриці R :

$$|R| = 0,00881;$$

обчислимо значення критерію χ^2 :

$$\chi^2 = - \left[n - 1 - \frac{1}{6} (2m + 5) \right] \cdot \ln |R| = - \left[19 - \frac{1}{6} (6 + 5) \right] \ln 0,00881 = 81,23005;$$

порівняємо значення χ^2 з табличним при $\frac{1}{2} m(m-1) = 3$ ступенях свободи й
рівні значущості $\alpha = 0,05$ (дод.3):

$$\chi_{таб}^2 = 7,814724.$$

Оскільки $\chi^2 > \chi_{таб}^2$, то в масиві незалежних змінних існує
мультиколінеарність у сукупності.

Крок 4. Визначимо матрицю похибок:

$$C = R^{-1} = (X^{*'} X^*)^{-1};$$

$$C = \begin{pmatrix} 24,00377 & -22,82912 & -0,7311322 \\ -22,82912 & 26,20416 & -3,235457 \\ 0,731132 & -3,235457 & 4,5144749 \end{pmatrix}.$$

Крок 5. Розрахуємо F - критерії:

$$F_k = \frac{(c_{kk} - 1)(n - m)}{m - 1}, k = 1, 2, 3,$$

де c_{kk} - діагональні елементи матриці C ;

$$F_1 = 195,53205,$$

$$F_2 = 214,2354,$$

$$F_3 = 29,87303;$$

значення критеріїв F_k порівняємо з табличним при $(n - m = 17)$ і $(m - 1) = 2$
ступенях свободи і рівні значущості $\alpha = 0,05$ (дод.5):

$$F_{таб} = 19,43703.$$

Оскільки $F_1 > F_{таб}$, $F_2 > F_{таб}$, $F_3 > F_{таб}$, робимо висновок, що перша, друга
й третя незалежні змінні мультиколінеарні з іншими.

Визначимо коефіцієнти детермінації для кожної змінної:

$$R_k^2 = 1 - \frac{1}{c_{kk}};$$

$$R_1^2 = 0,958339; R_2^2 = 0,961838; R_3^2 = 0,778490$$

Крок 6. Знайдемо часткові коефіцієнти кореляції, які характеризують тісноту зв'язку між двома змінними за умови, що інші змінні $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_m}$ не впливають на цей зв'язок (існування парної мультиколінеарності):

$$r_{kj} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk}c_{jj}}},$$

де c_{kj} - елементи матриці C , що розміщені в k -му рядку і j -му стовпці ($k = \overline{1, m}; j = \overline{1, m}$), c_{kk} і c_{jj} - діагональні елементи матриці C ;

$$r_{12} = 0,910257, r_{13} = 0,070234, r_{23} = 0,297472$$

Однак якщо порівняти абсолютні значення часткових парних коефіцієнтів, то можна побачити, що перші значно менші, ніж останні. Тому на основі знання парних коефіцієнтів кореляції висновок про мультиколінеарність робити неможливо. Для цього необхідно ще виконати 7-й крок.

Крок 7. Визначимо t - критерій на основі частинних коефіцієнтів кореляції:

$$t_{kj} = |r_{kj}| \cdot \frac{\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{kj}^2}};$$

$$t_{12} = 9,064506, t_{13} = 0,290302, t_{23} = 1.284666;$$

значення критеріїв t_{kj} порівняємо з табличними при $(n-m)=17$ ступенях свободи й рівні значущості $\alpha = 0,05$ (дод. 4):

$$t_{\alpha\beta} = 2,109818$$

Оскільки $t_{12} > t_{\alpha\beta}$, $t_{13} < t_{\alpha\beta}$, $t_{23} < t_{\alpha\beta}$, то між першою та другою незалежними змінними існує мультиколінеарність.

Якщо F - критерій більший за табличне значення, тобто коли k – та змінна залежить від усіх інших у масиві, то необхідно вирішувати питання про її вилучення з переліку змінних.

Якщо t_{kj} - критерій більший за табличний, то ці дві змінні (k і j) тісно пов'язані одна з одною. Звідси, аналізуючи рівень обох видів критеріїв F і t , можна зробити обгрунтований висновок про те, яку зі змінних необхідно вилучити з дослідження або замінити іншою. Проте заміна масиву незалежних змінних завжди має узгоджуватись з економічною доцільністю, що впливає з мети дослідження.

5.7. Засоби усунення мультиколінеарності.

Найпростіше позбутися мультиколінеарності в економетричній моделі можна, відкинувши одну зі змінних мультиколінеарної пари. Але на практиці вилучення якогось чинника часто суперечить логіці економічних зв'язків.

Виявлення мультиколінеарності є лише частиною справи. Інша частина – як її усунути. Безпомилкових і абсолютно правильних порад немає, оскільки

мультиколінеарність є прикладною проблемою. Звичайно, усе залежить від ступення мультиколінеарності, однак у будб-якому разі можна запропонувати кілька простих методів усунення мультиколінеарності:

- 1) використання додаткової або первинної інформації;
- 2) об'єднання інформації;
- 3) відкидання змінної з високою кореляцією;
- 4) перетворення даних (використання перших різниць);
- 5) збільшення кількості спостережень.

Які поради спрацюють на практиці, залежить від істотності проблеми та її характеру.

Якщо переліченими методами не вдається усунути мультиколінеарність, то для оцінювання параметрів багатовимірної моделі доцільно застосувати **метод головних компонентів**.

5.8. Алгоритм методу головних компонентів

Цей метод призначений для оцінювання моделей великого розміру, а також для оцінки параметрів моделі, якщо до неї входять мультиколінеарні змінні.

Опишемо цей алгоритм.

Крок 1. Нормалізувати змінні x_1, x_2, \dots, x_m регресійної моделі, обчисливши

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}},$$

де n - кількість спостережень ($i = \overline{1, n}$); m - кількість пояснюючих змінних у моделі ($j = \overline{1, m}$); \bar{x}_j - середня арифметична j -ї незалежної змінної; σ_{x_j} - середньоквадратичне відхилення j -ї незалежної змінної.

Крок 2. Побудувати нову матрицю X^* , елементами якої є нормалізовані незалежні змінні.

Крок 3. Обчислити кореляційну матрицю

$$r = \frac{1}{n} (X^* X^{*'}),$$

де $X^{*'}$ - транспонована матриця X^* :

$$R = X^{*' } X^* = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

(недіагональні елементи матриці R характеризують щільність зв'язку однієї незалежної змінної з іншою ($r_{ij} = r_{x_i x_j}$), тобто є парними коефіцієнтами кореляції).

Крок 4. Знайти характеристичні числа матриці r , тобто визначити корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ рівняння m -го порядку:

$$|r - \lambda E| = 0,$$

де E - одинична матриця розмірності $m \times m$, $\lambda_j, j = \overline{1, m}$ - характеристичні числа матриці r .

Крок 5. Власні значення $\lambda_i, i = \overline{1, m}$, упорядкувати за абсолютним рівнем вкладу кожної головної компоненти до загальної дисперсії.

Крок 6. Розв'язати систему рівнянь

$$|r - \lambda E| \vec{a} = 0$$

і обчислити власні вектори $a_i, i = \overline{1, m}$, за умови, що вони відповідають таким співвідношенням:

$$a'_i a_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Крок 7. Знайти головні компоненти векторів $z_i = \overline{xa_i}, i = \overline{1, m}$, які задовольняють умови

$$\sum_{j=1}^n z_{ij} = 0,$$

$$\frac{1}{n} z'_i z_i = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$z'_i z_j = 0, \quad i \neq j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Крок 8. Визначити параметри моделі $\hat{Y} = Z\hat{P}$:

$$\hat{P} = Z^{-1}Y.$$

Крок 9. Знайти параметри моделі $\hat{Y} = XA$:

$$A = \vec{a}\hat{P}.$$

Зауважимо, що метод головних компонентів доцільно застосовувати, по-перше, для оцінювання параметрів моделей з великою кількістю факторів, по-друге, для моделей, у яких незалежні змінні (стовпці матриці спостережень X) мають однакові одиниці вимірювання.

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Що означає мультиколінеарність змінних?
2. До яких наслідків призводить мультиколінеарність?
3. Як впливає наявність мультиколінеарності на оцінку параметрів моделі?
4. За допомогою яких методів визначають наявність мультиколінеарності?
5. Які статистичні критерії включає алгоритм Фаррара-Глобера?
6. Охарактеризуйте алгоритм Фаррара-Глобера.

7. Які висновки можна зробити, дослідивши мультиколінеарність за алгоритмом Фаррара-Глобера?
8. Що характеризують елементи кореляційної матриці R ?
9. Як усунути мультиколінеарність? Наведіть методи її усунення.
10. Яким методом можуть бути оцінені параметри моделі з мультиколінеарними змінними?
11. Як обчислити головні компоненти?
12. Як оцінити параметри моделі на основі головних компонентів?
13. Які умови мають задовольняти головні компоненти?
14. Коли доцільно застосовувати метод головних компонентів?
15. Покажіть, як можна оцінити параметри моделі $\hat{Y} = X\hat{\beta}$, скориставшись параметрами моделі $\hat{Y} = Z\hat{b}$.
16. Для трьох пояснювальних змінних обчислено матрицю:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0,7 & 0,4 \\ 0,7 & 1 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть характеристичні числа λ_k цієї матриці.

17. З допомогою матриці $(r - \lambda E)$ обчисліть власні вектори a_k :

$$(r - \lambda E) = \begin{pmatrix} -2/7 & -1/7 & 3/7 \\ -1/7 & -1/7 & -1/7 \\ 3/7 & -1/7 & -2/7 \end{pmatrix},$$

де елементи a_k нормалізовані.

18. Обчисліть головні компоненти матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{20} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{20} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -3/\sqrt{20} \end{pmatrix},$$

яка складається з трьох власних векторів.

Матрицю стандартизованих змінних X^* візьміть із прикладу 1?.

19. Обчисліть F -критерій для визначення мультиколінеарності трьох пояснювальних змінних, якщо задано матрицю

$$C = \begin{pmatrix} 1,30 & -0,32 & 0,41 \\ -0,32 & 1,20 & 0,81 \\ 0,41 & 0,61 & 1,41 \end{pmatrix} = r^{-1}.$$

Сукупність спостережень $n = 10$.

20. Використовуючи елементи матриці C із завдання 19, обчисліть коефіцієнти детермінації змінних. Що вони характеризують?
21. Використовуючи елементи матриці C із завдання 19, обчисліть t -критерій для оцінювання попарної мультиколінеарності змінних.

Розділ 6. ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНІСТЬ

6.1. Визначення гетероскедастичності та її природа.

Наслідки гетероскедастичності

Розглянемо класичну лінійну багатofакторну модель

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m + u. \quad (6.1)$$

Як завжди,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

$$X = \{1, x_{ij}\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Для застосування МНК при оцінюванні параметрів моделі раніше було сформульовано основні припущення, які на практиці можуть порушуватись.

У попередньому розділі розглядався особливий випадок багатofакторного регресійного аналізу, пов'язаний з проблемою мультиколінеарності. Тепер розглянемо інший особливий випадок, що стосується сталості дисперсії кожної випадкової величини u_i (гомоскедастичність залишків).

Означення 6.1. Якщо дисперсія залишків стала для кожного спостереження, то це явище називається гомоскедастичністю:

$$Du_i = M(u_i - Mu_i)^2 = \sigma_{u_i}^2 = const, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.3)$$

Якщо це припущення не задовольняється в якомусь окремому випадку, то маємо гетероскедастичність (помилки u_i некорельовані, але мають несталу дисперсію).

Означення 6.2. Якщо дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження або групи спостережень, то це явище називається гетероскедастичністю:

$$Du_i = M(u_i - Mu_i)^2 = \sigma_{u_i}^2 \neq const, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.4)$$

Розглянемо питання про доцільність припущення (6.3) і про те, що відбувається, якщо це припущення не задовольняється.

Насамперед зауважимо, що сутність припущення про гомоскедастичність полягає в тому, що *варіація кожної випадкової складової u_i навколо її математичного сподівання не залежить від значення факторів x* :

$$\sigma_{u_i}^2 \neq f(x_1, x_2, \dots, x_{p_i}).$$

Графічно випадок гомоскедастичності для простої лінійної регресії показано випадковою дисперсією $\sigma_{u_i}^2$ у межах однакової відстані від лінії регресії (див. рис. 6.1 а).

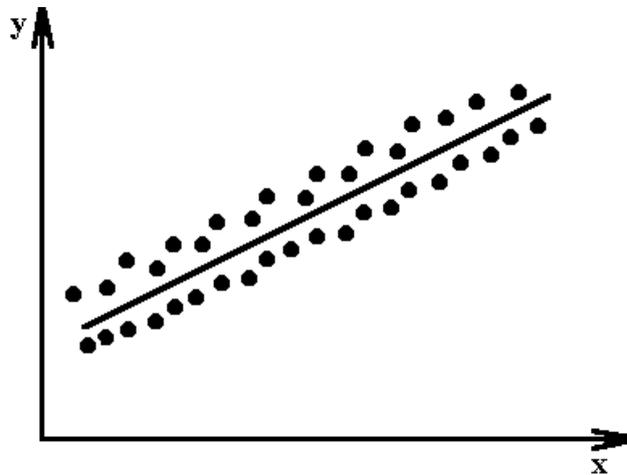


Рис. 6.1а. Гомоскедастичність

Форма гетероскедастичності залежить від знаків і значень коефіцієнтів у залежності

$$\sigma_{u_i}^2 = f(x_1, x_2, \dots, x_{p_i}).$$

У цьому разі маємо справу з гетероскедастичністю. Графічна форма розкиду спостережень залежить від виду гетероскедастичності, тобто форми зв'язку між $\sigma_{u_i}^2$ та x_i . На рис. 6.1 (б, в, г) показано три різні види гетероскедастичності. Зокрема на рис.6.1б показано випадок монотонно зростаючої дисперсії $\sigma_{u_i}^2$, (із зростанням x_i зростає і дисперсія $\sigma_{u_i}^2$). Це загальноприйнятий вид гетероскедастичності, що допускається в економетричних дослідженнях.

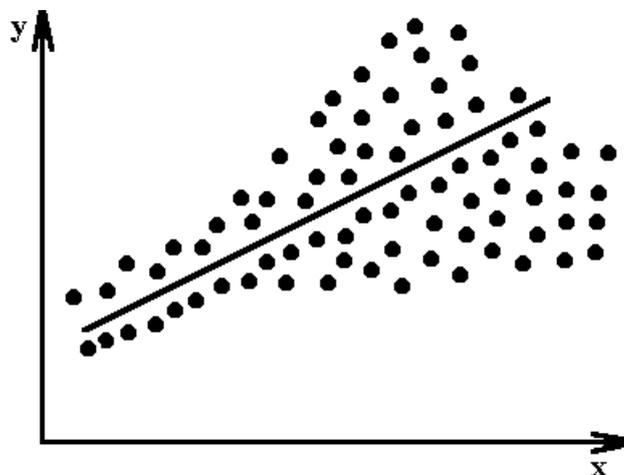


Рис.6.1б. Зростання дисперсії u_i

На рис.6.1в показаний випадок спадної гетероскедастичності: коли x набуває більших значень, відхилення спостережень від лінії регресії зменшується, таким чином дисперсія випадкової змінної зменшується із зростанням x .

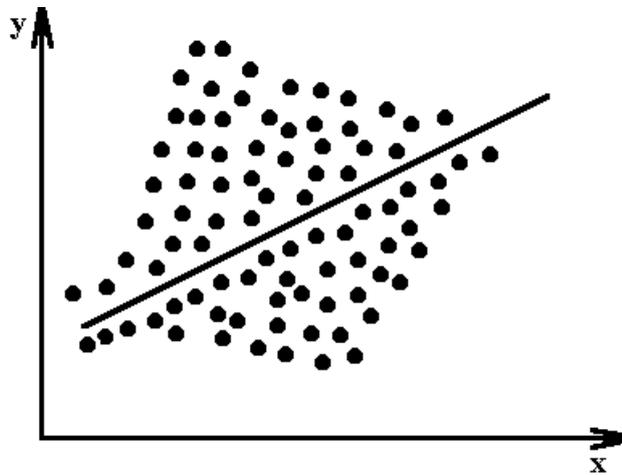


Рис.6.1в. Спадання дисперсії u_i

На рис.6.1г зображено більш складний вид гетероскедастичності: спочатку дисперсія $\sigma_{u_i}^2$ зменшується із зростанням x , але після певного рівня x^* починає зростати із зростанням x .

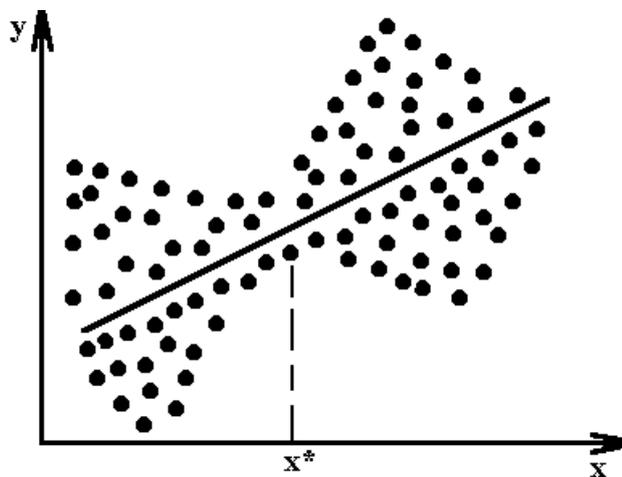


Рис.6.1г. Складний випадок

Зрозуміло, що форма гетероскедастичності залежить від знаків та значень коефіцієнтів у залежності $\sigma_{u_i}^2 = f(x_1, x_2, \dots, x_{p_i})$.

Оскільки u_i - не спостережувана випадкова величина, ми не знаємо справжньої форми гетероскедастичності.

У прикладних дослідженнях, як правило, використовують зручне припущення, а саме в разі простої лінійної регресії гетероскедастичність має форму

$$\sigma_{u_i}^2 = k^2 x^2$$

($k = const$, яку потрібно оцінити).

У багатьох економетричних дослідженнях може очікуватись, що припущення про сталу дисперсію випадкової змінної не зберігатиметься. Це можна легко зрозуміти, якщо врахувати фактори, вплив яких **абсорбується** значенням помилки. Згадаємо, що випадкова величина u виражає вплив на залежну змінну помилок в її вимірюванні та неврахованих факторів. У обох випадках є підстави для зміни з часом дисперсії $\sigma_{u_i}^2$. Помилки вимірювання мають тенденцію до накопичення з плином часу, тому їхня величина збільшується. У такому разі дисперсія $\sigma_{u_i}^2$, збільшується із зростанням значень x . З іншого боку, техніка вибірки та інші методи збору даних постійно вдосконалюються і тому помилки вимірювання можуть зменшуватися. У такому разі $\sigma_{u_i}^2$ також зменшуватиметься. Але важливіше те, що багато із неврахованих змінних можуть змінюватись в однаковому з x напрямку, викликаючи, таким чином, збільшення відхилення спостережень від лінії регресії. Розглянемо, наприклад, просту лінійну регресійну модель

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i,$$

де y_i - заощадження i -го домогосподарства; x_i - дохід i -го домогосподарства (рис. 6.2 та 6.3).

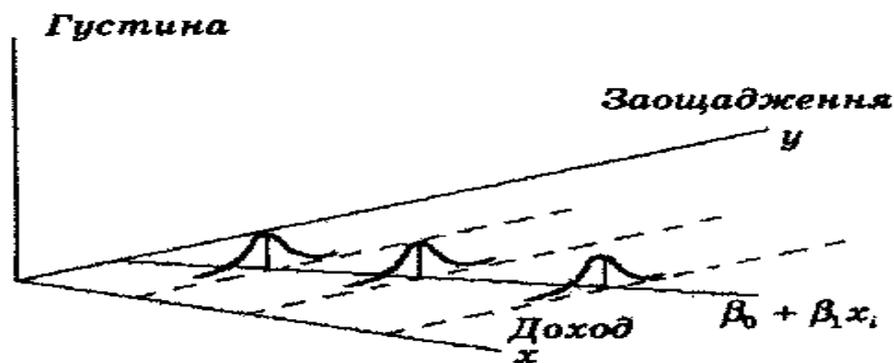


Рис. 6.2. Випадок гомоскедастичності

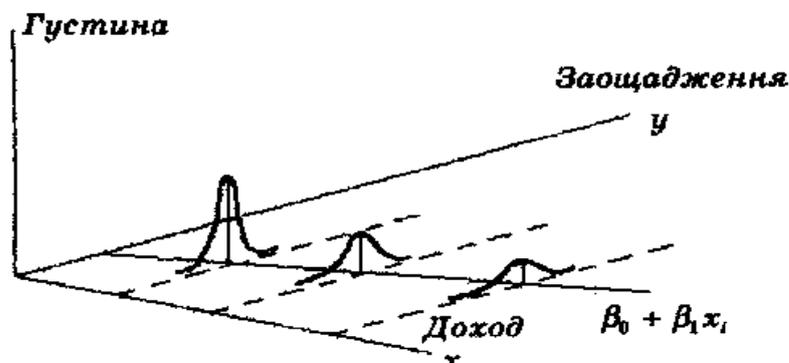


Рис.6.3. Випадок гетероскедастичності

З рис. 6.2 та 6.3 видно, що із зростанням доходу заощадження також зростають. Але на рис.6.2 дисперсія заощаджень залишається однаковою за усіх рівнів доходу, тоді як на рис.6.3 вона зростає разом з доходом.

Яка ж ситуація типовіша? Звичайно, ситуація, зображена на рис.6.3. Сім'ї з більшим доходом, як правило, показують більшу варіацію у своїй поведінці заощаджень, ніж сім'ї з низьким доходом. Сім'ї з високим доходом схильні дотримуватись певного стандарту життя, і коли їхній дохід падає, вони швидше скоротять свої заощадження, ніж споживання. З іншого боку, сім'ї з низьким доходом заощаджують із певною метою (наприклад, щоб сплатити розстрочку чи борг), і тому їхні заощадження більш регулярні. Це означає, що при високих доходах вони будуть високими, тоді як при низьких доходах - малими. Тому припущення про сталу дисперсію не витримується при оцінюванні функції заощаджень з сімейного бюджету.

Якщо розглянути модель, котра пов'язує кількість помилок під час диктанту з кількістю годин, відведених на практику, то також можна помітити, що з плином часу дисперсія зменшується. Це очевидно: чим більше практикуєш, тим менше помиляєшся.

Аналогічно, компанії з більшими прибутками проводять ризикованішу дивідендну політику порівняно з компаніями, які мають менші прибутки. Банки, які мають у розпорядженні обладнання для обробки даних у місячних та квартальних звітах своїх клієнтів, помиляються менше, ніж банки, які не мають подібних засобів обслуговування.

Розглянемо вибірку фірм певної галузі з метою оцінки виробничої функції Кобба - Дугласа:

$$y = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2} e^u.$$

У цьому разі u вміщує в собі такі фактори, як підприємництво, технологічні відмінності заводів різних фірм, відмінності у навичках чи організації та інші фактори. Ці фактори не мають значного коливання у малих фірмах і значно варіюють у великих фірмах. Отже, u будуть *гетероскедастичними*.

Підсумовуючи, зазначимо, що априорі є підстави стверджувати: *на практиці припущення про гомоскедастичність порушуються*.

Тому важливо дослідити *наслідки гетероскедастичності* при оцінці невідомих параметрів та їхніх середньоквадратичних відхилень. Доведено, що звичайний випадок гетероскедастичності – це зростаюча дисперсія u .

Приклад 6.1. Побудуємо економетричну модель, що характеризує залежність між заощадженнями та доходом населення, млрд ф.ст. (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Заощадження	0,36	0,2	0,08	0,20	0,10	0,12	0,41	0,50	0,43
Дохід	8,8	9,4	10,0	10,6	11,0	11,9	12,7	13,5	14,3
Рік	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Заощадження	0,59	0,90	0,95	0,82	1,04	1,53	1,94	1,75	1,99
Дохід	15,5	16,7	17,7	18,6	19,7	21,1	22,8	23,9	25,2

Скориставшись оператором оцінювання ІМНК

$$A = (X'X)^{-1}X'Y,$$

Дістанемо $a_0 = -1,081$, $a_1 = 0,1178$. Економетрична модель має вигляд:

$$y = -1,081 + 0,1178x.$$

Коефіцієнт детермінації для цієї моделі $R^2 = 0,918$, а це означає, що варіація заощаджень Y на 91,8% визначається варіацією доходів населення.

На перший погляд, результат наводить на думку, що специфікація моделі не містить помилки.

Але логічно висунути гіпотезу, що відхилення заощаджень від норми можуть бути пропорційними доходу $\sigma_{u_i}^2 = \sigma_u^2 x_i^2$, тобто для цієї моделі дуже ймовірно існування гетероскедастичності залишків.

Отже, вихідну інформацію доцільно перетворити, поділивши обидві змінні на величину доходу x (табл. 6.2):

$$y' = y/x, \quad x' = 1/x.$$

Таблиця 6.2

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y'	0,041	0,022	0,008	0,019	0,009	0,010	0,032	0,037	0,030
x'	0,114	0,106	0,100	0,094	0,091	0,084	0,079	0,074	0,070
Рік	10	11	12	13	14	15	16	17	18
y'	0,038	0,054	0,054	0,044	0,053	0,073	0,015	0,073	0,079
x'	0,065	0,060	0,056	0,054	0,051	0,047	0,044	0,042	0,040

Нове рівняння зв'язку згідно з даними табл. 6.2 має вигляд

$$y' = -0,854 + 0,102x'.$$

У результаті перетворення вихідних даних практично повністю змінилася специфікація моделі. Оскільки $x' = 1/x$, то цей зв'язок нелінійний. По-друге, $y' = y/x$ доходу.

Виконавши цю процедуру, дістанемо таке: спостереження з меншими значеннями x' мають відносно більшу питому вагу при оцінюванні параметрів моделі, ніж у першому варіанті.

З наведеного прикладу бачимо, що явище гетероскедастичності не впливатиме на оцінки параметрів ІМНК, якщо певним чином перетворити вихідну інформацію. При цьому якщо економетрична модель має лише дві змінні, то це можна зробити так, як у прикладі.

Це перетворення, значно ускладнюється, якщо будується економетрична модель з багатьма змінними. У такому разі потрібно з'ясувати зміст гіпотези, згідно з якою $M(uu') = \sigma_u^2 S$, де σ_u^2 лишається невідомим параметром, а S - відома симетрична додатно визначена матриця.

Наслідки порушення припущення про гомоскедастичність:

- 1) неможливо знайти середньоквадратичне відхилення параметрів $\sigma_{a_i}^2$ регресії, а отже, неможливо оцінити значущість параметрів;
- 2) неможливо побудувати довірчий інтервал для прогнозних значень y_{np} ;
- 3) отримані за МНК оцінки параметрів регресії не є ефективними (не мають найменшої дисперсії).

Зазначимо, що якщо незважаючи на гетероскедастичність ми використовуватимемо звичайні процедури перевірки гіпотез, то висновки можуть бути неправильними. Зрозуміло, гетероскедастичність є суттєвою проблемою, а тому потрібно вміти з'ясувати її наявність.

6.2. Тестування наявності гетероскедастичності

Як і в разі мультиколінеарності, єдиних правил виявлення гетероскедастичності немає, а є різноманітні тести (критерії): критерій μ , параметричний та непараметричний тести Гольдфельда-Квандта, тест Глейсера, тест рангової кореляції Спірмана та ін. Розглянемо лише деякі з них.

Зауважимо, що інколи в ході проведення економітричних досліджень гетероскедастичність вгадується інтуїтивно або висувається як абсолютне припущення:

$$\sigma_{u_i}^2 = f(x_1, x_2, \dots, x_{p_i}).$$

Наприклад, вивчаючи бюджет сім'ї, можна помітити, що дисперсія залишків зростає відповідно до зростання доходу. Отже, перший крок до виявлення гетероскедастичності – глибокий *аналіз змісту* досліджуваної проблеми.

Кроме того, існує графічний метод тестування наявності гетероскедастичності, що ґрунтується на встановленні наявності систематичного зв'язку квадратів залишків регресійної моделі, побудованої на основі припущення про відсутність гетероскедастичності (*графічний аналіз*).

6.3. Параметричний тест Гольдфельда-Квандта

Коли сукупність спостережень невелика, то розглянутий вище метод не застосовний.

У такому разі Гольдфельд і Квандт запропонували розглянути випадок, коли $M(u_i u_j) = \sigma_u^2 x_{ij}^2$, тобто дисперсія залишків зростає пропорційно до квадрата однієї з незалежних змінних моделі:

$$Y = XA + u.$$

Для виявлення наявності гетероскедастичності згадані вчені склали параметричний тест, в якому потрібно виконати такі кроки.

Крок 1. Спостереження (вихідні дані) впорядкувати відповідно до величини елементів вектора x_i , який може спричинити зміну дисперсії залишків.

Крок 2. Відкунити c спостережень, які розміщені всередині векторів вихідних даних, де $c = \frac{4n}{15}$, n – кількість елементів вектора x_i .

Крок 3. Побудувати дві моделі на основі звичайного МНК за двома створеними сукупностями спостережень обсягом $\frac{n-c}{2}$ за умови, що $\frac{n-c}{2} \geq m$, де m – кількість змінних.

Крок 4. Знайти суму квадратів залишків S_1 і S_2 за першою і другою моделями:

$$S_1 = u_1' u_1, \quad S_2 = u_2' u_2,$$

де u_1 і u_2 - залишки відповідно за першою і другою моделями.

Крок 5. Розрахувати критерій $F^* = \frac{S_2}{S_1}$, який у разі виконання гіпотези про гомоскедастичність відповідатиме F -розподілу з $\gamma_1 = \frac{(n-c-2m)}{2}$, $\gamma_2 = \frac{(n-c-2m)}{2}$ ступенями свободи;

значення критерію F^* порівняти з табличним значенням F -критерію при вибраному рівні значущості α і відповідних ступенях свободи; якщо $F^* \leq F_{табл}$, то гетероскедастичність відсутня.

Зауваження. Чим більше значення F^* , тим більша гетероскедастичність залишків.

Приклад 6.2. У табл. 6.3 наведено дані про загальні витрати та витрати на харчування. Для цих даних перевірити гіпотезу про відсутність гетероскедастичності.

Таблиця 6.3

Номер спостереження	Витрати на Харчування, ум. од.	Загальні витрати, ум. од.	\hat{Y}	u	u^2
1	2,30	15	2,16	0,14	0,020
2	2,20	15	2,16	0,04	0,002
3	2,08	16	2,20	-0,12	0,015
4	2,20	17	2,25	-0,05	0,002
5	2,10	17	2,25	-0,15	0,022
6	2,32	18	2,29	0,26	0,0007
7	2,45	19	2,34	0,11	0,012
8	2,50	20			
9	2,20	20			
10	2,50	22			
11	3,10	64			

12	2,50	68	2,37	0,13	0,016
13	2,82	72	2,52	0,29	0,085
14	3,04	80	2,68	0,36	0,128
15	2,70	85	2,99	-0,29	0,084
16	3,94	90	3,18	0,76	0,573
17	3,10	95	3,38	-0,28	0,076
18	3,99	100	3,57	0,42	0,178

Розв'язання.

1. Ідентифікуємо змінні:

Y - витрати на харчування (залежна змінна);

X - загальні витрати (незалежна змінна);

$$Y = f(X, u).$$

2. Для перевірки гіпотези про відсутність гетероскедастичності застосуємо параметричний тест Гольдфельда-Квандта.

Упорядкуємо значення незалежної змінної від меншого до більшого і відкинемо c значень, які містяться всередині впорядкованого ряду:

$$c = \frac{4 \cdot 18}{15} \approx 4.$$

3. Визначимо залишки за цими двома моделями:

$$u = Y_I - Y'_I;$$

$$u = Y_{II} - Y'_{II}.$$

Залишки та квадрати залишків наведено в табл. 6.3.

4. Обчислимо залишкові дисперсії та знайдемо їх співвідношення:

$$F^* = \frac{S_2}{S_1} = \frac{1,14}{0,074} = 15,41.$$

5. Порівняємо критерій F^* з критичним значенням F -критерію при $\gamma_1 = 5$ і $\gamma_2 = 5$ ступенях свободи і рівні довіри $P = 0,99$ $F_{\alpha=0,01} = 11$. Оскільки $F^* > F_{kp}$, то вихідні дані мають гетероскедастичність.

6.4. Непараметричний тест Гольдфельда-Квандта

Цей тест базується на встановленні кількості піків значень залишків після впорядкування (ранжування) спостережень за x_{ij} . Якщо для всіх значень змінної x_{ij} залишки розподіляються приблизно однаково, то дисперсія їх однорідна і гетероскедастичність відсутня. Якщо вона змінюється, то гетероскедастичність присутня.

Зазначимо, що цей тест не цілком надійний для перевірки на гетероскедастичність. Однак він дуже простий і часто використовується для першої оцінки наявності гетероскедастичності множини спостережень.

6.5. Тест Глейсера

Ще один тест для перевірки гетероскедастичності склав Глейсер. Цей тест відповідає знаходженню параметрів регресійної моделі за допомогою МНК при використанні абсолютних значень залишків в функції від незалежної змінної x_j , яка може викликати зміну дисперсії σ_u^2 . Для цього використовується одна з таких видів функцій:

$$|u| = a_0 + a_1 x_j; \quad |u| = a_0 + a_1 x_j^{-1}; \quad |u| = a_0 + a_1 x_j^{\frac{1}{2}}$$

і т. ін.

Рішення про гетероскедастичність на підставі значень параметрів \hat{a}_0 і \hat{a}_1 таке: чистій гетероскедастичності відповідає значення параметрів $\hat{a}_0 = 0$, $\hat{a}_1 \neq 0$; змішаній гетероскедастичності - $\hat{a}_0 \neq 0$, $\hat{a}_1 \neq 0$. Залежно від цього потрібно використовувати різні матриці S .

Оскільки явище гетероскедастичності пов'язане з тим, що змінюються дисперсії залишків, а коваріація між ними відсутня, то матриця S у співвідношенні $M(uu') = \sigma_u^2 S$ має бути додатно визначеною й діагональною.

Приклад 6.3. Перевірити гіпотезу про відсутність гетероскедастичності для побудови моделі, яка характеризує залежність заощаджень від доходів населення. Статистичні дані наведено в таблиці.

Рік	Заощадження	Дохід
1	1,36	14,87
2	1,2	14,4
3	1,7	13,8
4	1,84	15,6
5	2,1	15,94
6	1,12	16,9
7	1,89	17,7
8	2,3	18,67
9	2,5	18,04
10	1,17	19,5
11	1,9	21,4
12	1,95	22,7
13	2,87	25,7
14	2,6	27,18
15	1,75	28,9
16	1,96	29,45
17	1,4	30,07
18	2,99	30,2

Розв'язання. Ідентифікуємо змінні: y – заощадження, x – дохід. Специфікуємо модель у вигляді

$$y = a_0 + a_1 x + u,$$

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x,$$

де u - стохастична складова моделі.

Для перевірки гіпотези про відсутність гетероскедастичності залишків моделі застосуємо параметричний тест Гольдфельда-Квандта.

Крок 1. Спостереження впорядкуємо за зростанням за величиною доходу (вектор x), який може спричинити зміну дисперсії залишків.

Рік	Заощадження	Дохід
1	1,7	13,8
2	1,2	14,4
3	1,36	14,87
4	1,84	15,6
5	2,1	15,94
6	1,12	16,9
7	1,89	17,7
8	2,5	18,04
9	2,3	18,67
10	1,17	19,5
11	1,9	21,4
12	1,95	22,7
13	2,87	25,7
14	2,6	27,18
15	1,75	28,9
16	1,96	29,45
17	1,4	30,07
18	2,99	30,2

Крок 2. Відкинемо c спостережень усередині вектора вихідних даних, де $c = \frac{4n}{15}$, n - кількість елементів вектора x .

Отже,

$$c = \frac{4 \cdot 18}{15} \approx 4.$$

Отримаємо дві сукупності спостережень обсягом $\frac{18-4}{2} = 7$.

Перша сукупність спостережень:

1	1,7	13,8
2	1,2	14,4
3	1,36	14,87
4	1,84	15,6
5	2,1	15,94
6	1,12	16,9
7	1,89	17,7

Друга сукупність спостережень:

1	1,95	22,7
2	2,87	25,7
3	12,6	27,18
4	1,75	28,9
5	1,96	29,45
6	1,4	30,07
7	2,99	30,2

Крок 3. Побудуємо дві моделі на основі звичайного МНК за двома створеними сукупностями спостережень:

$$\hat{y}_1 = 0,7411 + 0,05514x,$$

$$\hat{y}_2 = 2,9371 - 0,02595x.$$

Крок 4. Знайдемо суму квадратів залишків S_1 і S_2 за першою і другою моделями:

$$S_1 = u_1' u_1 = 0,8149, \quad S_2 = u_2' u_2 = 2,1628,$$

де u_1 і u_2 - залишки відповідно за першою і другою моделями.

Крок 5. Розрахуємо критерій $F^* = \frac{S_2}{S_1} = \frac{2,1628}{0,8149} \approx 2,654$, який у разі

виконання гіпотези про гомоскедастичність відповідатиме F -розподілу з $\gamma_1 = \frac{(n-c-2m_1)}{2} = 5$, $\gamma_2 = \frac{(n-c-2m_2)}{2} = 5$ ступенями свободи; $m_1 = m + 1$;

значення критерію F^* порівняємо з табличним значенням F -критерію при рівні значущості $\alpha = 0,05$ і відповідних ступенях свободи:

$$F_{\text{табл}} = F(0,05; 5) = 5,05.$$

Оскільки $F^* \leq F_{\text{табл}}$, то гетероскедастичність відсутня. Отже, МНК-оцінки параметрів регресійної моделі можуть застосовуватися для подальших досліджень.

6.6. Узагальнений метод найменших квадратів

(метод Ейткена)

Економетрична модель, в якій спостерігається явище гетероскедастичності, є узагальненою моделлю і для оцінювання її параметрів слід використовувати не метод найменших квадратів (МНК), а **узагальнений метод найменших квадратів** (метод Ейткена або скорочено УМНК).

Ідея цього метода полягає у знаходженні оцінок матриці параметрів A моделі з використанням додатково визначеної діагональної матриці S , за допомогою якої коригується вхідна інформація.

Визначення матриці S . Оскільки явище гетероскедастичності пов'язане лише з тим, що змінюються дисперсії залишків, а коваріація між ними відсутня, то матриця s має бути діагональною, а саме

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

де λ_i - параметри, які обчислюються з використанням гіпотез:

а) $M(uu') = \sigma_u^2 x_{ij}$, тобто дисперсія залишків пропорційна до змін пояснювальної змінної x_i , тоді $\lambda_i = \frac{1}{x_i}$ ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$);

б) $M(uu') = \sigma_u^2 x_{ij}^2$, тобто дисперсія залишків пропорційна до змін квадрату пояснювальної змінної x_i^2 , тоді $\lambda_i = \frac{1}{xx_i^2}$;

в) $M(uu') = \sigma_u^2 \{u\}^2$, тобто дисперсія залишків пропорційна до змін квадрату залишків за модулем $|u_i|^2$, тоді $\lambda_i = \{u_i\}^2$ або $\lambda_i = (a_0 - a_1 x_{ij})^2$, або $\lambda_i = (a_0 - a_1 x_{ij}^{-1})^2$.

Оскільки матриця S симетрична і додатна визначена, то при $S = P'P$, то матриця P має вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

За наявності гетероскедастичності узагальнена модель має вигляд

$$Y^* = AX^* + u^*, \quad (6.5)$$

де $Y^* = P^{-1}Y$; $X^* = P^{-1}X$; $u^* = P^{-1}u$.

Використання для узагальненої моделі (6.5) 1МНК приводить до такого оператора оцінювання параметрів УМНК:

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y.$$

Найкращий лінійний незміщений прогноз за моделлю УМНК визначається за співвідношенням

$$\hat{p} = X_0 \hat{A} + W V^{-1} u,$$

де $V = \sigma_u^2 S$ - відома симетрична додатково визначена матриця; W - матриця поточних і прогнозних значень залишків; X_0 - заданий вектор точкового періоду.

Величина $W V^{-1} u$ визначає залишки прогнозного періоду і може розглядатися як помилка прогнозу на підставі моделі $\hat{Y} = \hat{A} X_0$.

Приклад 6.4. Використовуючи дані таблиці 6.4, де спостерігається гетероскедастичність, дати оцінки параметрів моделі згідно з методом Ейткена.

Таблиця 6.4.

Номер спостереження	Витрати на харчування, ум. од.	Загальні витрати, ум. од.
1	2,30	15
2	2,20	15
3	2,08	16
4	2,20	17
5	2,10	17
6	2,32	18
7	2,45	19
8	2,50	20
9	2,20	20
10	2,50	22
11	3,10	64
12	2,50	68
13	2,82	72
14	3,04	80
15	2,70	85
16	3,94	90
17	3,10	95
18	3,99	100

Розв'язання.

1. Ідентифікуємо змінні:

Y - витрати на харчування (залежна змінна);

X - загальні витрати (незалежна змінна).

Тоді загальний вигляд економетричної моделі такий:

$$Y = a_0 + a_1 X + u;$$

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X; \quad u = Y - \hat{Y}.$$

2. Згідно з першою гіпотезою припустимо, що в діагональній матриці S елементи λ_i пропорційні до зміни пояснювальної змінної x_i , тобто $\lambda_i = \frac{1}{x_i}$ (x_i - загальні витрати за i -м спостереженням). Тоді обернена матриця до s записується у вигляді (вище та нижче головної діагоналі нулі):

б) коефіцієнт кореляції $R = \sqrt{R^2} = 0,85$, що свідчить про досить тісний зв'язок між витратами на харчування та загальними витратами;

в) залишкова дисперсія $\sigma_u^2 = 0,083$ показує, що розрахункові значення витрат на харчування дуже близькі до фактичних;

г) параметр моделі $\hat{a}_1 = 0,0141$ свідчить про те, що збільшення загальних витрат на одиницю сприятиме зростанню витрат на харчування на 0,0141 одиниць.

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Яке явище називається гомоскедастичністю?
2. Яке явище називається гетероскедастичністю?
3. У чому полягає суть гетероскедастичності?
4. Яку форму звичайно має гетероскедастичність?
5. До яких наслідків призводить порушення припущення про гомоскедастичність?
6. Як встановити наявність гетероскедастичності?
7. Назвіть методи визначення гетероскедастичності.
8. За яких умов застосовується параметричний тест Гольдфельда-Квандта?
9. У чому суть непараметричного тесту?
10. На чому базується тест Глейсера?
11. За рахунок чого може існувати гетероскедастичність?
12. У чому суть узагальненого методу найменших квадратів?

Розділ 7. АВТОКОРЕЛЯЦІЯ

7.1. Природа і наслідки автокореляції

При побудові економетричних моделей з використанням динамічних (часових) рядів доводиться врахувати взаємозв'язок між собою випадкових величин у різні моменти часу. Такими випадковими величинами в моделях часто виступають залишки.

Означення 7.1. Автокореляція — це взаємозв'язок послідовних елементів часового чи просторового ряду даних.

В економетричних моделях особливе значення має автокореляція залишків. Звернемось до другої необхідної умови лінійної моделі:

$$M(uu') = \sigma_u^2 E.$$

Це означає, що коваріація між залишками економетричної моделі відсутня, а дисперсія є сталою для всіх спостережень.

В економетричних дослідженнях часто виникають такі ситуації, коли дисперсія залишків стала, але спостерігається їх коваріація. Це явище називають **автокореляцією залишків**.

Виникнення автокореляції залишків може бути зв'язана з такими причинами:

- автокореляцією послідовних елементів матриць залежної та незалежних змінних;
- автокореляцією послідовних значень змінних, які не ввійшли до економетричної моделі;
- помилкою специфікації економетричної моделі.

Коваріація залишків у загальному вигляді економетричної моделі запишеться у вигляді

$$M(u_t u_{t-s}) = \rho^s \sigma_u^2, \quad (7.1)$$

де t, s - моменти часу; ρ - коефіцієнт автокореляції, який характеризує рівень взаємозв'язку кожного наступного значення залишків u_{t-s} з попереднім u_t .

Вираз (7.1) означає, що за наявності автокореляції залишків форма порушення другої необхідної умови для застосування МНК має вигляд:

$$M(uu') = \sigma_u^2 S, \quad (7.2)$$

де S - матриця коефіцієнтів автокореляції s -го порядку для динамічного ряду залишків u_t

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

де параметр ρ характеризує коваріацію кожного наступного значення залишків із попереднім.

Так, якщо для залишків записати авторегресійну модель першого порядку

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t,$$

то ρ характеризує силу зв'язку величин залишків у період t з величинами залишків у період $t-1$.

Якщо проігнорувати матрицю S при визначенні дисперсії залишків і для оцінювання параметрів моделі застосувати МНК, то можливі такі наслідки:

1. Оцінки параметрів моделі можуть бути незміщеними, але неефективними, тобто вибіркові дисперсії вектора оцінок \hat{A} можуть бути невиправдано великими.

2. Оскільки вибіркові дисперсії обчислюються не за уточненими формулами, то статистичні критерії t - і F -статистики, які знайдено для лінійної моделі, практично не можуть бути використані в дисперсійному аналізі.

3. Неефективність оцінок параметрів економетричної моделі призводить, як правило, до неефективних прогнозів, тобто прогнозів з дуже великою вибірковою дисперсією.

7.2. Методи визначення автокореляції

Наявність автокореляції перевіряється за такими критеріями: Дарбіна-Уотсона; фон Неймана; нециклічного коефіцієнта автокореляції; циклічного коефіцієнта автокореляції.

7.2.1. Критерій Дарбіна-Уотсона

Крок 1. Розраховується значення d -статистики за формулою

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2}. \quad (7.3)$$

Значення d -статистики Дарбіна-Уотсона перебуває в межах $0 \leq DW \leq 4$.

Крок 2. Задаємо рівень значущості α . За таблицею Дарбіна-Уотсона при заданому рівні значущості α , кількості факторів m і кількості спостережень n знаходимо два значення DW_1 і DW_2 :

- Якщо $0 < DW < DW_1$, то наявна додатна автокореляція.
- Якщо $DW_1 \leq DW \leq DW_2$ або $4 - DW_2 \leq DW \leq 4 - DW_1$, ми не можемо зробити висновки ані про наявність, ані про відсутність автокореляції (DW потрапляє в зону невизначеності).
- Якщо $4 - DW_1 < DW < 4$, маємо від'ємну автокореляцію.
- Якщо $DW_2 < DW < 4 - DW_2$, то автокореляція відсутня.

Графічне зображення розподілу ілюструє рис. 7.1.



Рис. 7.1. Зони автокореляційного зв'язку за критерієм Дарбіна-Уотсона

Приклад 7.1. Нехай обсяг вибірки складається з 20 спостережень. На основі цієї вибірки побудовано модель, яка включає три пояснювальні змінні. Наведено табличні значення критерію Дарбіна - Уотсона DW_1 і DW_2 для 1% - і 5%-го рівня значущості:

	DW_1	DW_2	
$\alpha_1 = 1\%$		0,77	1,41
$\alpha_2 = 5\%$		1,00	1,68

Для додатної автокореляції залишків ці значення є межами п'яти інтервалів, на основі яких можна прийти до таких висновків:

- 1) $0 \leq DW \leq 0,77$ - нульова гіпотеза відхиляється як при 1%-му, так і на 5%-му рівнях значущості;
- 2) $0,77 \leq DW \leq 1,00$ - нульова гіпотеза відхиляється при 5%-му рівні значущості; для 1%-го рівня значущості певних висновків зробити не можна;
- 3) $1,00 \leq DW \leq 1,41$ - критерій не дає певних результатів як при одному, так і при іншому рівні значущості;
- 4) $1,41 \leq DW \leq 1,68$ - нульова гіпотеза не відхиляється при 1%-му рівні значущості, для 5%-го рівня значущості певних висновків зробити не можна;
- 5) $1,68 \leq DW \leq 2,00$ - нульова гіпотеза не відхиляється при обох рівнях значущості.

Дж. Джонстон [10] наводить ряд спостережень, які свідчать про те, що верхня межа DW_2 ближча до істинної межі прийняття гіпотези, яка перевіряється. Тому якщо виникають сумніви, можна обмежитись одним показником - DW_2 . Це означає, що сам критерій також може мати зміщення, він указує на наявність серійної кореляції першого порядку і там, де її не повинно бути. Дж. Джонстон зауважує, що оскільки наслідок некоректного прийняття нульової гіпотези може бути набагато серйознішим, ніж наслідок її некоректного відхилення, тому в сумнівних випадках нульову гіпотезу, як правило, краще відхилити. Якщо оцінка критерію DW перевищує 2, то при перевірці нульової гіпотези можна як альтернативну використовувати гіпотезу про існування від'ємної автокореляції першого порядку; у такому разі необхідно відняти відповідні значення від 4 і скористатись тими самими табличними значеннями DW .

7.2.2. Критерій фон Неймана

Для виявлення автокореляції залишків використовується також критерій фон Неймана:

$$Q = Q_{\text{факт}} = DW \frac{n}{n-1}.$$

$$\text{При } n \rightarrow \infty \quad Q = DW.$$

Фактичне значення критерію фон Неймана порівнюється з табличним при вибраному рівні значущості α і заданій кількості спостережень: $Q_{\text{табл}} = Q_{(\alpha, n)}$.

Якщо $Q_{\text{факт}} < Q_{\text{табл}}$, то існує додатна автокореляція.

7.2.3. Нециклічний коефіцієнт автокореляції

Окрім статистик Дарбіна-Уотсона та Неймана, для перевірки автокореляції застосовують також нециклічний коефіцієнт автокореляції r^* . Цей коефіцієнт

виражає ступінь взаємозв'язку залишків кожного наступного значення з попереднім, а саме:

I ряд - $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}$;

II ряд - $u_2, u_3, u_4, \dots, u_n$.

Він обчислюється за формулою:

$$r^* = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t u_{t-1}) - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{t=1}^n u_t \right) \left(\sum_{t=2}^n u_{t-1} \right)}{\sqrt{\left[\sum_{t=1}^n u_t^2 - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{t=1}^n u_t \right)^2 \right] \left[\sum_{t=2}^n u_{t-1}^2 - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{t=2}^n u_{t-1} \right)^2 \right]}}.$$

Коефіцієнт r^* може набувати значень в інтервалі $(-1; +1)$. Від'ємні значення його свідчать про від'ємну автокореляцію, додатні - про додатну. Значення, що містяться в деякій критичній області біля нуля, свідчать про відсутність автокореляції, тобто стверджують нульову гіпотезу про відсутність автокореляції залишків. Оскільки ймовірнісний розподіл r^* встановити трудно, то на практиці замість r^* обчислюють циклічний коефіцієнт автокореляції r^0 .

7.2.4. Циклічний коефіцієнт автокореляції

Якщо часовий ряд має циклічний характер, тобто припускається, що після значення u_t загальний характер зміни членів ряду повторюється, то автокореляцію визначають за допомогою коефіцієнта r^0 , запровадженого Андерсоном.

Він виражає ступінь взаємозв'язку рядів:

I ряд - $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n$;

II ряд - $u_2, u_3, u_4, \dots, u_n, u_1$.

Для досить довгих рядів вплив циклічних членів стає незначним, тому ймовірнісний розподіл коефіцієнта r^* наближається до ймовірнісного розподілу коефіцієнта циклічної автокореляції r^0 , який обчислюється за формулою

$$r^0 = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1} + u_n u_1 - \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n u_t \right)^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n u_t \right)^2}.$$

Якщо останній член ряду дорівнює першому, тобто $u_1 = u_n$, то нециклічний коефіцієнт автокореляції дорівнює циклічному. Очевидно, якщо залишки не містять тренда, то припущення про рівність $u_1 = u_n$ недалеко від дійсності й циклічний коефіцієнт автокореляції близький до нециклічного. Крім того, припускаючи, що середня залишків дорівнює нулю, тобто $\bar{u} = 0$, а отже,

$$\sum_{t=2}^n u_t \approx \sum_{t=2}^n u_{t-1} \approx 0,$$

Отримуємо приблизну формулу для обчислення циклічного коефіцієнта автокореляції:

$$r = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2},$$

причому $r \in (-1, 1)$. Значення r використовується при оцінюванні параметрів моделі.

7.3. Методи оцінки параметрів моделі з автокореляцією

Зазначимо, що параметри моделі з автокорельованими залишками можна оцінити на основі чотирьох методів:

- 1) Ейткена (УМНК);
- 2) перетворення вихідної інформації;
- 3) Кочрена-Оркатта;
- 4) Дарбіна.

Перші два методи доцільно застосовувати тоді, коли залишки описується авторегресійною моделлю першого порядку:

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t.$$

Ітераційні методи Кочрена-Оркатта і Дарбіна можна застосовувати для оцінки параметрів економетричної моделі й тоді, коли залишки описується авторегресійною моделлю вищого порядку:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + v_t,$$

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + v_t.$$

7.3.1. Метод Ейткена

Як зазначалося, оператор оцінювання за методом Ейткена має вигляд:

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1} X'S^{-1}Y. \quad (7.4)$$

Оскільки коваріація залишків $\rho^s \rightarrow 0$ при $S > 2$, то обернену матрицю коваріації залишків доцільно використовувати у вигляді:

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

На практиці для розрахунку ρ використовується співвідношення

$$r = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_i^2}$$

або

$$r' = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_i^2},$$

де u_t - величина залишків у період t ; u_{t-1} - величина залишків у період $t-1$; n - число спостережень.

При реалізації алгоритму Ейткена для оцінки параметрів моделі застосовують такі п'ять кроків.

Крок 1. Оцінка параметрів моделі за методом 1МНК.

Крок 2. Дослідження залишків на наявність автокореляції.

Крок 3. Формування матриці коваріації залишків V або S .

Крок 4. Обернення матриці V або S .

Крок 5. Оцінка параметрів методом Ейткена, тобто згідно з (7.4).

7.3.2. Метод перетворення вхідної інформації

Цей метод використовується при авторегресійній моделі першого порядку. Він дає оцінку параметрів моделі за допомогою двокрокової процедури:

- 1) перетворення вхідної інформації за допомогою матриці перетворення T ;
- 2) застосування 1МНК для оцінки перетворених даних.

Економетрична модель представляється у вигляді

$$TY = TAX + Tu,$$

щоб матриця перетворення T відповідала умові

$$M(Tu u' T') = \sigma_u^2 E.$$

Тому перетворення вхідної інформації виконується за допомогою такої матриці розміром $n \times n$:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Безпосереднім множенням легко переконатись, що

$$M(T_1 u u' T_1') = \sigma_u^2 E.$$

А це означає, що можна застосовувати 1МНК до перетворених даних $T_1 Y$ і $T_1 X$, які мають вигляд

$$T_1 Y = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} y_1 \\ y_2 - \rho y_1 \\ y_3 - \rho y_2 \\ y_4 - \rho y_3 \\ \dots \\ y_n - \rho y_{n-1} \end{pmatrix}; \quad T_1 X = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} x_1^1 & \dots & \sqrt{1-\rho^2} x_1^m \\ 1-\rho & x_2^1 - \rho x_1^1 & \dots & x_2^m - \rho x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-\rho & x_n^1 - \rho x_{n-1}^1 & \dots & x_n^m - \rho x_{n-1}^m \end{pmatrix}.$$

Іноді для перетворення вихідної інформації використовується матриця T_2 розміром $(n-1) \times n$, яка отримується з матриці T_1 внаслідок викреслювання першого рядка:

$$T_2 = \begin{pmatrix} -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Неважко показати, що застосування 1МНК до даних $T_1 Y$ і $T_1 X$ дає таку саму оцінку параметрів моделі, як і метод Ейткена, а для даних $T_2 Y$ і $T_2 X$ - забезпечує порівняно добру апроксимацію.

У загальному випадку, коли ми не маємо інформації ні про порядок авторегресійної моделі, ні про значення параметрів у ній, а через це не можемо застосувати ні метод Ейткена, ні метод перетворення вихідної інформації, в економетричній літературі пропонуються наближені методи Кочрена-Оркатта і Дарбіна.

7.3.3. Метод Кочрена-Оркатта

Метод Кочрена-Оркатта використовується тоді, коли залишки задовільняють автокореляційній моделі вищого порядку. Він є ітеративним методом оцінювання параметрів економетричної моделі, коли мінімізується сума квадратів залишків.

Для простійшої моделі парної регресії

$$\begin{aligned} y_t &= a_0 + a_1 x_t + u_t, \\ u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \end{aligned} \quad (7.5)$$

сума квадратів залишків визначається так:

$$\sum_{t=2}^n \varepsilon_t^2 = \sum_{t=2}^n [(y_t - \rho y_{t-1}) - a_0(1 - \rho) - a_1(x_t - \rho x_{t-1})]^2. \quad (7.6)$$

Метод наближеного пошуку параметрів \hat{a}_0 , \hat{a}_1 , і ρ , які мінімізують суму квадратів (7.6), дає ітеративний метод, запропонований Кочреном і Оркаттом і названий на їхню честь.

Опишемо його алгоритм.

Крок 1. Довільно вибирають значення параметра ρ , наприклад $\rho = r_1$. Підставивши його в (7.6), обчислюють $\hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1^{(1)}$.

Крок 2. Поклавши $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(1)}$, підставимо їх у (7.6) і обчислимо $\rho = r_1$.

Крок 3. Підставивши в співвідношення (7.6) значення $\rho = r_2$ знайдемо $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$.

Крок 4. Використаємо $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(2)}$ для мінімізації суми квадратів залишків (7.6) за невідомим параметром $\rho = r_3$. Процедура триває доти, доки наступні значення параметрів \hat{a}_0 , \hat{a}_1 , і ρ не будуть відрізнятись менш як на задану величину.

Зазначимо, що наведений метод завжди забезпечує:

- знаходження глобального оптимуму;
- порівняно добру збіжність.

На відміну від попереднього, у цьому методі подальші ітерації припиняються тоді, коли на основі критерію Дарбіна-Уотсона робиться висновок про відсутність автокореляції залишків.

Розглянемо алгоритм.

Крок 1. Приймається гіпотеза $r_1 = 0$ і мінімізується на основі 1МНК сума квадратів: $\sum_{t=2}^n (y_t - \hat{a}_0^{(1)} - \hat{a}_1^{(1)} x_t)^2$. Отже, так само й далі обчислюються параметри для моделі (7.5).

Крок 2. Знаходяться залишки і на основі критерію Дарбіна — Уотсона перевіряється нульова гіпотеза відносно автокореляції залишків. Якщо гіпотеза відхиляється, то переходять до кроку 3.

Крок 3. На даному кроці мінімізується сума квадратів відхилень:

$$\sum_{t=2}^n \left[(y_t - \hat{a}_0^{(1)} - \hat{a}_1^{(1)} x_t) - r (y_{t-1} - \hat{a}_0^{(1)} - \hat{a}_1^{(1)} x_{t-1}) \right]^2.$$

де $\hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1^{(1)}$ - оцінки параметрів, знайдені на першому кроці 1МНК. У результаті параметр r_2 визначається як коефіцієнт регресії залишків, знайдених 1МНК, на їх лагові змінні, які стосуються минулого періоду.

Крок 4. Використовуючи значення оцінки параметра r_2 визначають оцінки параметрів $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$ на основі 1МНК, який застосовується до перетворених даних $(y_t - r_2 y_{t-1})$ і $(x_t - r_2 x_{t-1})$.

Крок 5. Визначаються залишки і перевіряються на наявність автокореляції. Якщо гіпотеза про наявність автокореляції відхиляється, то ітеративний процес припиняється. У противному разі переходимо до кроку 3, де використовуються знайдені оцінки параметрів $\hat{a}_0^{(2)}$, $\hat{a}_1^{(2)}$.

Коли ітеративний процес припиняється, то виконується перевірка значущості параметрів з допомогою останньої економетричної моделі. У такому разі звичайні формули дадуть обґрунтовані оцінки дисперсій залишків.

7.3.4. Метод Дарбіна

Метод Дарбіна використовується у випадку авторегресійної моделі вищого порядку. Він також є ітераційним методом і складається з двокрокової процедури, яка також дає оцінки параметрів, вони асимптотично мають той самий вектор середніх і ту саму матрицю дисперсій, що й оцінки методу найменших квадратів.

Крок 1. Підставимо значення залишків, яке підпорядковане авторегресійній моделі першого порядку $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, до економетричної моделі $y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t$ Тоді дістанемо

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + \rho u_{t-1} + \varepsilon_t,$$

де $u_{t-1} = y_{t-1} - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_{t-1}$.

Звідси

$$y_t = a_0(1 - \rho) + \rho y_{t-1} + a_1 x_t - a_1 \rho x_{t-1} + \varepsilon_t,$$

де ε_t має скалярну матрицю дисперсій.

Згідно з 1МНК визначаються параметри цієї моделі, куди входить і коефіцієнт ρ . У результаті обчислень маємо $\rho = r$.

Крок 2. Значення $\rho = r$ використовується для перетворення змінних $(y_t - ry_{t-1})$ і $(x_t - rx_{t-1})$, а 1МНК застосовується до перетворених даних. Коефіцієнт при $(x_t - rx_{t-1})$ є оцінкою параметра a_1 , а вільний член, поділений на $-r$, оцінює параметр a_0 .

Метод Дарбіна дуже просто поширюється на випадок кількох незалежних змінних і для автокореляції вищих порядків.

Описані вище ітеративний метод Кочрена-Оркатта і розглянута двокрокова процедура Дарбіна за наявності автокореляції залишків асимптотичне ефективніший, ніж 1МНК.

Але при цьому постають два важливі запитання:

1) Чи будуть ці методи ефективнішими, ніж 1МНК для малих вибірових сукупностей?

2) Якою - однаковою чи різною - буде ефективність застосування методів Кочрена- Оркатта і Дарбіна для малих вибірок?

Висновок 1. 1МНК дає менш ефективні оцінки порівняно з іншими методами, якщо сукупність спостережень $n = 20$ одиниць, а $|\rho| > 0,3$.

Висновок 2. Якщо $|\rho| > 0,3$, то зниження ефективності оцінок 1МНК порівняно зі складнішими процедурами невелике.

Висновок 3. Метод Дарбіна забезпечує найкращу оцінку для ширшого кола параметрів порівняно з іншими методами.

Висновок 4. Нелінійний метод оцінювання параметрів не дає відчутних переваг порівняно з двокроковою процедурою Дарбіна.

Для економетричної моделі з автокореляцією оцінку прогнозного рівня залежної змінної можна дістати, скористувавшись формулою:

$$\hat{y}_{n+1} = x_{n+1}\hat{A} + \rho\hat{u}_n,$$

де \hat{y}_{n+1} - незміщений прогноз залежної змінної для періоду $(n + 1)$ у моделі, побудованої для n спостережень; x_{n+1} - прогнозне значення незалежної змінної; \hat{A} - оцінка параметрів моделі.

Приклад 7.2. Оцінювання параметрів моделі з автокорельованими залишками

За допомогою двох взаємозв'язаних часових рядів про роздрібний товарообіг та доходи населення побудувати економетричну модель, що характеризує залежність роздрібного товарообігу від доходу за даними таблиці:

Таблиця 7.1.

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Роздрібний товарообіг, г.о.	24,0	25,0	25,7	27,0	28,8	30,8	33,8	38,1	43,4	45,5
Доход, г.о.	27,1	28,2	29,3	31,3	34,0	36,0	38,7	43,2	50,0	52,1

Необхідно визначити:

1. Ймовірну наявність автокореляції.
2. Оцінити параметри моделі методом перетворення вхідної інформації.
3. Визначити прогнозний рівень доходу.

Розв'язання.

1. Ідентифікуємо змінні моделі:

y_t - роздрібний товарообіг у період t (залежна змінна);

x_t - дохід у період t (незалежна змінна).

2. Специфікуємо економетричну модель:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t;$$

$$\hat{y}_t = \hat{a}_0 + a_1 x_t; \quad u_t = y_t - \hat{y}_t.$$

3. Визначимо оцінки параметрів моделі \hat{a}_0 та \hat{a}_1 за методом 1МНК, припускаючи, що залишки u_t некорельовані:

$$\hat{A} = (X'X)^{-1} X'Y,$$

де X' - матриця, транспонована до X .

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 27,1 \\ 1 & 28,2 \\ 1 & 29,3 \\ 1 & 31,3 \\ 1 & 31,0 \\ 1 & 36,0 \\ 1 & 38,7 \\ 1 & 43,7 \\ 1 & 50,0 \\ 1 & 52,1 \end{pmatrix};$$

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 10 & 370,4 \\ 370,4 & 14441,6 \end{pmatrix}; (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,0002 & -0,513 \\ -0,513 & 0,0014 \end{pmatrix}; (X'Y) = \begin{pmatrix} 322,1 \\ 12555,9 \end{pmatrix};$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2,0002 & -0,513 \\ -0,513 & 0,0014 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 322,1 \\ 12555,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,172 \\ 0,865 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель має вигляд:

$$\hat{Y}_t = 0,172 + 0,865 X_t. \quad (7.7)$$

4. Знайдемо розрахункові значення роздрібногo товарообігу на основі моделі (7.7) і визначимо залишки моделі u_t :

Рік	y_t	\hat{y}_t	u_t	u_t^2	$u_t - u_{t-1}$	$(u_t - u_{t-1})^2$	$u_t u_{t-1}$
1	24,0	23,613	0,388	0,150	-	-	-
2	25,0	24,564	0,436	0,190	0,049	0,0024	0,1691
3	25,7	25,515	0,485	0,034	-0,252	0,0632	0,0806
4	27,0	27,245	-0,245	0,060	-0,430	0,1848	-0,045
5	28,8	29,581	-0,779	0,609	-0,535	0,2866	0,1913
6	30,8	31,310	-0,510	0,261	0,270	0,0729	0,3984
7	33,8	33,646	0,154	0,023	0,665	0,4417	-0,0787
8	38,1	37,971	0,129	0,017	-0,025	0,0006	0,0199
9	43,4	43,420	-0,020	0,0002	-0,149	0,0222	-0,003
10	45,5	42,236	0,264	0,070	0,284	0,0804	-0,005
Σ	322,1	-	-	1,4152	-	1,1550	0,7276

Знайдемо оцінку критерію Дарбіна-Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2} = \frac{1,155}{1,4152} = 0,816.$$

Порівняємо значення критерію DW з даними статистичних таблиць для рівня значимості $\alpha = 0,05$, числа спостережень $n = 10$ та числа незалежних змінних $m = 1$. Критичні значення критерію DW у цьому разі такі:

$$DW_1 = 0,879 - \text{нижня межа}; \quad DW_2 = 1,320 - \text{верхня межа}.$$

Оскільки критерій $DW_{\text{факт}} < DW_1$, то можна стверджувати, що залишки u_t мають додатну автокореляцію.

Наявність чи відсутність автокореляції залишків можна також визначити згідно з критерієм фон Неймана: $Q = \frac{n}{n-1} DW = \frac{10}{10-1} \cdot 0,816 = 0,906$. Це значення порівнюється з табличним: $Q_{\text{табл}} = 1,18$ при $n = 10$ і рівні значущості $\alpha = 0,05$. Оскільки $Q < Q_{\text{табл}}$, то існує додатна автокореляція залишків.

5. Використовуємо метод перетворення вхідної інформації для оцінювання параметрів економетричної моделі з автокорелбованими залишками.

Сформуємо матрицю T_1 для перетворення вхідних даних. Для цього визначимо величину коефіцієнта автокореляції:

$$\rho \approx \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2} + \frac{m+1}{n} = \frac{10}{9} \cdot \frac{0,7276}{1,4156} + \frac{2}{10} = 0,77.$$

Тоді матриця T_1 буде мати вигляд:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0,64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 \end{pmatrix}$$

Перетворимо змінні y_t та x_t на основі матриці T_1 :

$$T_1 y_t = \begin{pmatrix} 15,27 \\ 6,49 \\ 6,42 \\ 7,18 \\ 7,97 \\ 8,58 \\ 10,04 \\ 12,03 \\ 14,01 \\ 12,02 \end{pmatrix}; \quad T_1 x_t = \begin{pmatrix} 0,64 & 17,25 \\ 0,23 & 7,30 \\ 0,23 & 7,55 \\ 0,23 & 8,70 \\ 0,23 & 9,86 \\ 0,23 & 9,77 \\ 0,23 & 10,93 \\ 0,23 & 13,85 \\ 0,23 & 16,29 \\ 0,23 & 13,53 \end{pmatrix}.$$

Для перетворених даних скористаємось оператором ІМНК:

$$\hat{A} = (X_*' X_*)^{-1} X_*' Y_*,$$

де $X_* = T_1 x_t$; $Y_* = T_1 y_t$.

Тоді маємо

$$(X_*' X_*) = \begin{pmatrix} 3,9815 & -0,0924 \\ -0,0924 & 0,0024 \end{pmatrix}; \quad X_*' Y_* = \begin{pmatrix} 71,815 \\ 3089,991 \end{pmatrix};$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3,9815 & -0,0924 \\ -0,0924 & 0,0024 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 71,815 \\ 3089,991 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,442 \\ 0,861 \end{pmatrix}.$$

Звідси $\hat{a}_0 = 0,442$, $\hat{a}_1 = 0,861$, а економетрична модель запишеться у вигляді:

$$\hat{Y}_t = 0,442 + 0,861 X_t.$$

6. Скориставшись економетричної моделлю, визначим прогнозний рівень товарообігу, коли дохід становить $x_{n+1} = 55$:

$$\hat{y}_{n+1} = 0,442 + 0,861x_{n+1} = 0,442 + 0,861 \cdot 55 = 47,8.$$

Знайдемо оцінку залишків прогнозу $\rho \hat{u}_n$, де \hat{u}_n - залишки за моделлю для $t = 10$, $\rho = 0,77$:

$$\begin{aligned}\hat{u}_t &= y_t - \hat{y}_t; \\ \hat{y}_t &= 0,442 + 0,861 \cdot 52,1 = 45,316; \\ \hat{u}_t &= 45,500 - 45,316 = 0,184; \\ \rho \hat{u}_n &= 0,77 \cdot 0,184 = 0,14.\end{aligned}$$

Тоді прогнозний рівень роздрібного товарообігу на одинадцятий рік ($n + 1$):

$$\hat{y}_{n+1} = 7,8 + 0,14 = 7,94.$$

7.4. Прогно

Нехай маємо модель: $Y = XA + u$, де $M(u) = 0$ і $M(uu') = \sigma_u^2 S = V$, яка побудована для n спостережень.

Використаємо цю модель для визначення прогнозу залежної змінної Y_{n+1} для періоду $n+1$ коли для цього періоду задано незалежну змінну x_{n+1} . Формула дає найкращий незміщений прогноз:

$$\hat{y}_{n+1} = x_{n+1} \hat{A} + W V^{-1} e,$$

де \hat{A} - оцінка параметрів моделі згідно з методом Ейткена,

$$\hat{u} = Y - X\hat{A}$$

і

$$W = \begin{bmatrix} M(u_1 u_{n+1}) \\ M(u_2 u_{n+1}) \\ M(u_3 u_{n+1}) \\ \dots \\ M(u_n u_{n+1}) \end{bmatrix}.$$

Якщо залишки описуються авторегресійною моделлю першого порядку, то з урахуванням рівності $M(u_t u_{t-s}) = \rho^s \sigma_u^2$ можна записати:

$$W = \rho^s \sigma_u^2 \begin{bmatrix} \rho^{n-1} \\ \rho^{n-2} \\ \rho^{n-3} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Отже, вектор w можна дістати, помноживши ρ на останній стовпець матриці v . Але оскільки $VV^{-1} = E$, то добуток WV^{-1} являє собою останній рядок матриці E , помножений на ρ .

$$\text{Звідси } WV^{-1}\hat{u}_n = \rho\hat{u}_n.$$

Формула прогнозу має вигляд

$$\hat{y}_{n+1} = x_{n+1}\hat{A} + \rho\hat{u}_n,$$

де \hat{y}_{n+1} - прогнозний рівень залежної змінної; x_{n+1} - прогнозне значення незалежної змінної.

Приклад 7.3. Використовуючи економетричну модель, яку побудовано на підставі даних про роздрібний товарообіг та дохід (приклад 7.2), визначити прогнозний рівень товарообігу, коли дохід становитиме $x_{n+1} = 55$.

Розв'язання.

1. Запишемо співвідношення, яке визначатиме прогнозний рівень залежної змінної

$$\hat{y}_{n+1} = x_{n+1}\hat{A} + \rho\hat{u}_n,$$

де $x_{n+1}\hat{A}$ - оцінка прогнозованої величини; $\rho\hat{u}_n$ - залишки прогнозу.

2. Скористаємося економетричною моделлю роздрібного товарообігу (приклад 7.2) для обчислення прогнозу:

$$\hat{y}_{n+1} = 0,442 + 0,861x_{n+1} = 0,442 + 0,861 \cdot 55 = 47,8.$$

3. Знайдемо оцінку залишків прогнозу ρe_n , де ρ - коефіцієнт коваріації залишків; e_n - залишки за моделлю для $t = 10$.

$$\rho = 0,77; \quad \hat{u}_n = 0,18;$$

$$\rho\hat{u}_n = 0,77 \cdot 0,18 \approx 0,14.$$

4. Визначимо прогнозний рівень роздрібного товарообігу на одинадцятий рік ($n + 1$):

$$\hat{y}_{n+1} = 47,8 + 0,14 = 47,94.$$

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Дайте означення автокореляції.
2. Які причини виникнення автокореляції?
3. Чим відрізняється УМНК при автокореляції?
4. До яких наслідків призводить автокореляція залишків?
5. Як впливає автокореляція на оцінку параметрів моделі?
6. Наведіть тести наявності автокореляції залишків.
7. Дайте стислу характеристику алгоритму методу Дарбіна-Уотсона.
8. Охарактеризуйте алгоритм критерію фон Неймана.
9. На основі яких методів можна оцінити параметри моделі з автокорельованими залишками?

10. У яких випадках для оцінки параметрів економетричної моделі з автокорельованими залишками доцільно застосовувати ітераційні методи Кочрена-Оркатта або Дарбіна?

11. Охарактеризуйте метод Ейткена оцінки параметрів економетричної моделі з автокорельованими залишками.

12. Охарактеризуйте алгоритм методу Кочрена-Оркатта.

13. Які переваги забезпечує метод Кочрена-Оркатта?

14. Як записати формулу прогнозу залежної змінної при автокореляції залишків? Чому вона має такий вигляд?

15. На основі приведених даних в таблиці ? необхідно:

1) побудувати економетричну модель;

2) дослідити залишки на наявність автокореляції;

3) перевірити наявність гетероскедастичності;

4) при наявності одного з порушень умов класичної регресії (автокореляції або гетероскедастичності) оцінити параметри побудованої узагальненої моделі.

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Річне споживання	1358,2	2006,4	2711,9	3162,7	3468,2	3922,2	4381,6	4691,3	5199,9	6009,6
Прибутки	2017,2	2752,1	3269	3747,1	4229	4847,5	5490,2	5815,6	6739,7	7953,2

16. Для оцінювання параметрів моделі $y_t = a_0 + a_1x_t + u_t$ скористайтеся методом перетворення вихідної інформації, яку задано у вигляді двох взаємопов'язаних часових рядів:

Рік	1	2	3	4	5	6	7
Y	11	10	13	12	15	16	14
X	3	5	6	7	9	10	11

а залишки u_t задовольняють авторегресійну схему першого порядку:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t.$$

17. Дайте порівняльний аналіз оцінок параметрів моделі, заданої в завданні 16, на основі 1МНК і перетворення вихідної інформації.

18. Визначіть ступінь зміщення коваріації параметрів і залишкової дисперсії при застосуванні 1МНК для виконаного завдання 16.

19. Дайте оцінку параметрів моделі, за методом Кочрена-Оркатта, якщо порядок авторегресійної моделі для залишків є схемою другого порядку. Вказівка: $r_1 = 0,4$, $r_2 = 0,3$ (за даними завдання 16).

20. Для моделі $y_t = a_0 + a_1x_t + u_t$, де $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$, дайте оцінку параметрів за методом Дарбіна, якщо вихідна інформація задана у вигляді двох часових рядів:

Рік	1	2	3	4	5	6	7
Y	10	12	15	17	19	18	21
X	3	5	6	7	9	10	11

Розділ 8. МОДЕЛІ РОЗПОДІЛЕНОГО ЛАГА

8.1. Поняття лага та лагових моделей в економіці

Для багатьох економічних процесів типово, що ефект від впливу деякого фактора на показник, який характеризує процес, виявляється не одразу, а поступово, через деякий час або протягом деякого часу. Таке явище називається запізнюванням (затримкою), а проміжок часу, у який спостерігається це запізнювання, - часовим лагом, або просто лагом.

Наприклад, функція споживання після різкої зміни доходу також змінюється, але не пропорційно до доходу. Зокрема, зі збільшенням доходу витрати значно зростають, а потім можуть зменшуватися за рахунок збільшення інвестицій (плануються великі витрати і зростають нагромадження, а споживання зменшується). Вкладання коштів у наукові дослідження не одразу впливає на зростання продуктивності праці – має пройти певний час від виникнення наукової ідеї до її впровадження у виробництво. Капітальне будівництво також не дає миттєвих прибутків і т.ін.

Означення 8.1. Моделі у яких досліджуваний показник у момент часу t визначається не лише поточними, а й попередніми значеннями незалежних змінних, називаються дистрибутивно-лаговими:

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x_{t-\tau} + u_t = a + a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + u_t,$$

де a_j - параметри моделі при лагових змінних; $x_{t-\tau}$ - пояснювальна лагова змінна; τ - період зрушення; u_t - залишки, що розподілені нормально, тобто мають нульове математичне сподівання і сталу дисперсію.

Означення 8.2. Моделі у яких досліджуваний показник у момент часу t визначається своїми попередніми значеннями, називаються авторегресійними або динамічними моделями. Наприклад,

$$y_t = a + a_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \dots + u_t.$$

Означення 8.3. Якщо в економетричній моделі незалежні змінні використовують за кілька попередніх періодів, то такі моделі називають моделями з кінцевим лагом (скінченними моделями). Якщо вплив незалежної змінної не обмежується певним періодом, розглядають нескінченні лагові моделі.

Звичайно, нескінченна лагова модель більш загальна, однак практичне застосування такої моделі досить проблематичне через велику кількість факторів, складність внутрішньої структури та обмеженість часових рядів – інформаційної бази моделей.

Означення 8.4. Коефіцієнти a_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, називаються коефіцієнтами лага, а послідовність $\{a_j, j = 0, 1, 2, \dots\}$ - структурою лага.

Коефіцієнт a_0 при незалежній змінній x_t , що відбиває її вплив на залежну змінну в поточний період, називається короткостроковим, або впливовим,

мультиплікатором. Чаткові суми коефіцієнтів $(a_0 + a_1)$, $(a_0 + a_1 + a_2)$, ..., що відображають зміну y_t в другий, третій і наступні періоди, називаються проміжними інтервалами. Загальна сума лагових коефіцієнтів для всієї моделі називається довгостроковим або загальним, дистрибутивно-лаговим мультиплікатором.

Остання сума для скінченних моделей, очевидно, є скінченним числом. Для нескінченної моделі лагові коефіцієнти за певних умов також можуть утворити скінченну суму. Якщо кожен із коефіцієнтів розділити на їх суму, отримаємо відповідно нормовані коефіцієнти лага та нормовану структуру лага.

Усі нормовані коефіцієнти менші від одиниці, а їх сума дорівнює одиниці.

Дистрибутивно-лагові моделі, які ще називають моделями розподіленого лага, задовільно описують економічні процеси лише в стабільних (незмінних) умовах. Необхідність врахувати ще й поточні умови функціонування вимагає застосування узагальнених моделей.

Означення 8.5. Якщо економетрична модель містить не лише лагові змінні, а й змінні, що безпосередньо впливають на досліджуваний показник (тобто містить й поточні умови функціонування), то така модель називається *узагальненою моделлю розподіленого лага*:

$$y_t = \sum_{\tau \geq 0} a_{\tau} x_{t-\tau} + \sum_{i=1}^m b_i x_{t,i} + u_t.$$

Оцінювання параметрів таких рівнянь ускладнюється обмеженнями, що накладаються на коефіцієнти при лагових змінних.

Перш ніж будувати економетричну модель з лаговими змінними, необхідно обґрунтувати величини лага. Для цього застосовують взаємну кореляційну функцію – послідовність коефіцієнтів кореляції, які визначають ступінь зв'язку кожного елемента вектора залежної змінної з елементом вектора незалежної змінної, зсунутими один відносно одного на часовий лаг τ :

$$r_{\tau} = \frac{(n - \tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t x_{t+\tau} - \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t \sum_{t=1}^{n-\tau} x_{t+\tau}}{\sqrt{\left[(n - \tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} y_t \right)^2 \right] \cdot \left[(n - \tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} x_{t+\tau}^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} x_{t+\tau} \right)^2 \right]}}. \quad (8.1)$$

Серед отриманих коефіцієнтів кореляції вибирають найбільший за модулем, а відповідне значення часового зсуву вважають лагом. Якщо таких коефіцієнтів кілька, застосовують модель розподіленого лага.

Приклад 8.1. На основі взаємопов'язаних часових рядів, які характеризують чисту продукцію та капітальні вкладення Республіки Сирії за 20 років, побудувати взаємну кореляційну функцію, використавши дані табл. 8.1.

Таблиця 8.1.

Рік	Капітальні вкладення, млн. сирійських лір	Чиста продукція, млн. сирійських лір	Рік	Капітальні вкладення, млн. сирійських лір	Чиста продукція, млн. сирійських лір
1	3857	24334	11	17006	72165
2	4686	28678	12	17352	78743
3	5515	33021	13	17838	80381
4	5209	32432	14	18878	82204
5	7522	40325	15	19090	77833
6	10390	49334	16	20016	81413
7	13678	54717	17	17736	77484
8	15976	53818	18	11951	75443
9	13880	55968	19	11469	85038
10	13949	61517	20	9068	75809

У результаті розрахунків, виконаних за формулою (8.1) для різних значень τ , отримано значення коефіцієнтів кореляції, що наведені в табл. 8.2.

Таблиця 8.2.

τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_τ	0,89	0,86	0,89	0,92	0,92	0,85	0,75	0,64	0,4	0,55

З табл.8.2 видно, що найбільше значення коефіцієнта кореляції $r_\tau = 0,92$. Він відповідає трьом значенням $\tau = \{3, 4, 5\}$. Це означає, що найбільшого впливу капітальних вкладень на обсяг чистої продукції слід очікувати впродовж третього, четвертого та п'ятого років.

Динамічна модель розподіленого лага в такому разі має вигляд

$$y_t = a_0 x_t + a_1 x_{t-3} + a_2 x_{t-4} + a_3 x_{t-5} + u_t,$$

де y_t - чиста продукція в період t ; a_j , $j = 0, 1, 2, 3$ - вагові коефіцієнти лагових змінних; $x_{t-\tau}$ ($\tau = 3, 4, 5$) - капітальні вкладення в період $t - \tau$.

8.2. Оцінювання параметрів дистрибутивно-лагових моделей

Для оцінювання параметрів дистрибутивно-лагових моделей звичайно застосовують два можливих підходи: послідовне оцінювання і апріорне оцінювання.

Ідея першого підходу полягає в тому, щоб поступово досліджувати вплив запізнених змінних на залежну змінну. Другий підхід базується на припущенні, що параметри моделі мають певну закономірність, тобто пов'язані між собою деякими співвідношеннями.

Послідовне оцінювання параметрів виконується так: спочатку будують регресію залежної та незалежної змінних в один і той самий момент часу, потім до моделі додають ще одну змінну – незалежну змінну в попередній момент часу, тобто розглядають залежність показника від двох змінних. Далі в регресію вводиться ще одна змінна – у момент часу, зсунутий на два попередніх проміжки,

і. т. д. Кожна з моделей досліджується на адекватність і значущість її параметрів. Процедура закінчується, коли параметри при лагових змінних починають бути статистично незначущими та (або) коефіцієнт хоча б однієї змінної змінює знак.

Такий метод хоч і повний, однак має певні недоліки. По-перше, те, що невідомою є максимальна тривалість лага, а це не дає змоги передбачити, скільки змінних увійде в модель. По-друге, між послідовними значеннями змінних здебільшого спостерігається висока кореляція, що породжує проблему мультиколінеарності в моделі. Крім того, через зменшення ступенів свободи в таких моделях оцінки стають дещо непевними, що також знижує їх якість.

Наявність мультиколінеарності між лаговими змінними ускладнює побудову моделі. Щоб усунути мультиколінеарність, на коефіцієнти при лагових змінних накладають додаткові обмеження (апріорне оцінювання), а саме вибирають їх так, щоб вплив лага на досліджуваний показник був "односпрямований" (тобто коефіцієнти були б однакового знака) і зменшувався з кожним наступним кроком у минуле. Такі припущення реалізують, як правило, у моделях, де параметри змінюються в геометричній прогресії. Крім того, нескінченна сума членів спадної геометричної прогресії є скінченною величиною, що дає змогу узагальнити модель з кінцевим лагом і застосовувати однакові методи оцінювання параметрів.

Однак і в цьому разі залишається велика кількість оцінюваних параметрів.

Уведення в модель лагової залежної змінної y_{t-1} (затримка на один період), відоме як перетворення Койка, значно спрощує модель:

$$y_t = w(1 - \lambda)x_t + \lambda y_{t-1} + (u_t - \lambda u_{t-1}), \quad (8.2)$$

де $w = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ (скінченне число), $0 \leq \lambda \leq 1$.

Така модель містить не лише поточні, а й попередні значення залежної змінної, тобто є авторегресійною.

Заміна незалежних лагових змінних x_{t-1}, x_{t-2}, \dots однією залежною змінною y_{t-1} зменшує кількість оцінюваних параметрів і усуває проблему мультиколінеарності, однак призводить до нових труднощів. Наявність у моделі лагової залежної змінної потребує перевірки передумови про незалежність змінних і залишків при застосуванні звичайного МНК. Крім того, залишки моделі $\mathcal{Q}_t = u_t + \lambda u_{t-1}$ часто виявляються серійно корельованими, а тому при дослідженні їх на автокореляцію необхідно використати спеціальні тести.

Отримана алгебраїчним способом модель Койка позбавлена теоретичного обґрунтування і фактично є послідовною моделлю.

З певних економічних міркувань можна отримати моделі, що зовні нагадують модель Койка, але з іншою інтерпретацією коефіцієнтів лагових змінних. Такими моделями є модель адаптивних сподівань

$$y_t = \alpha(1 - \lambda) + \beta(1 - \lambda)x_t + \lambda y_{t-1} + u_t(1 - \lambda u_{t-1}) \quad (8.3)$$

та модель часткового коригування

$$y_t = \alpha\gamma + \beta\gamma x_t + (1 - \gamma)y_{t-1} + u_t, \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (8.4)$$

Ці моделі відрізняються від моделі Койка наявністю вільного члена, але при цьому реалізують різні ідеї щодо економічної діяльності. У першій моделі відображено думку про те, що люди навчаються з попереднього досвіду, причому нещодавній досвід має більший вплив, аніж попередній; друга базується на тому, що через інертність економічної системи зміна одного економічного показника не одразу впливає на зміну іншого і відповідний рівень залежної змінної досягається через певний час.

8.3. Методи оцінювання параметрів лагової моделі

Три авторегресійних моделі – Койка, адаптивних сподівань (8.3) і часткового коригування (8.4) – можна подати в загальній формі:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + a_2 x_{t-1} + \mathcal{G}_t. \quad (8.5)$$

Наявність лагових залежних змінних у динамічних моделях створює певні проблеми при оцінюванні параметрів: серед пояснюючих змінних є стохастичні (залежні лагові змінні), а також існує проблема серійної кореляції залишків моделі та лагових змінних. Залежно від гіпотез щодо залишків таких моделей використовують відповідні методи оцінювання.

Гіпотеза 1. Залишки u_t є випадковими величинами і розподіляються за нормальним законом. В цьому разі для оцінки параметрів моделі можна застосувати 1МНК.

Гіпотеза 2. Залишки описуються авторегресивною схемою першого порядку виду

$$\mathcal{G}_t = u_t - \lambda u_{t-1}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (8.6)$$

Для оцінки параметрів моделі у матриці \hat{A} використовується метод Ейткена, згідно з яким

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y, \quad (8.7)$$

де матриця V має вигляд:

$$V = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1 + \lambda^2 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 + \lambda^2 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 + \lambda^2 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

Гіпотеза 3. Залишки описуються авторегресивною схемою першого порядку виду

$$\mathcal{G}_t = \rho \mathcal{G}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\rho| > 1. \quad (8.9)$$

Якщо відносно залишків моделі приймається третя гіпотеза, то параметри оцінюють за допомогою таких методів:

- 1) 1МНК;

- 2) метод Ейткена;
- 3) ітеративний метод;
- 4) двокрокову процедуру;
- 5) метод інструментальних змінних;
- 6) алгоритм Уолліса.

Розглянемо принципову суть цих підходів оцінювання параметрів моделі.

Метод найменших квадратів (1МНК) застосовується тоді, коли вхідні дані перетворені на основі параметрів λ і ρ . Ці параметри вибираються довільно в інтервалі $[0,1]$. Для кожної пари λ і ρ послідовно обчислюються залишки. Параметри λ і ρ вибираються доти, поки не буде мінімізована сума відхилень залишків.

Метод Ейткена оцінює параметри моделі на підставі матриці параметрів

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y,$$

де матриця s дорівнює

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

а матриця X має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} 1 & y_0 & x_1 \\ 1 & y_1 & x_2 \\ 1 & y_2 & x_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_{n-1} & x_n \end{pmatrix}.$$

Цей метод аналогічний оцінкам 1МНК для моделі

$$(y_t - \rho y_{t-1}) = a_0(1 - \rho) + a_1(y_{t-1} - \rho y_{t-2}) + a_2(x_t - \rho x_{t-1}) + \varepsilon_t,$$

відносно перетворених даних.

Ітеративний метод є альтернативою до методу Ейткена і його алгоритм базується на чотирьох кроках, які розглянемо на прикладі моделі

$$y_t = a_0(1 - \rho) + (a_1 + \rho)y_{t-1} - a_1\rho y_{t-2} + a_2x_t - a_2\rho x_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (8.10)$$

Крок 1. Вибирається початкове значення коефіцієнта $\rho = \rho_1$ і підставляється в рівняння (8.10).

Крок 2. Мінімізується сума квадратів залишків рівняння і в результаті застосування 1МНК розраховуються оцінки у першому наближенні $\hat{a}_0^{(1)}, \hat{a}_1^{(1)}, \hat{a}_2^{(1)}$.

Крок 3. Підставляються значення $a_0 = \hat{a}_0^{(1)}$, $\hat{a}_1^{(1)}$, $\hat{a}_2^{(1)}$ в модель (8.10) і визначається параметр ρ , тобто застосовується 1МНК до рівняння $\hat{g}_t = \rho g_{t-1} + \varepsilon_t$, що і дозволяє знайти $\rho = \rho_2$.

Крок 4. Заданням $\rho = \rho_2$ на основі 1МНК моделі (8.10) знаходяться оцінки параметрів у другому наближенні $\hat{a}_0^{(2)}$, $\hat{a}_1^{(2)}$, $\hat{a}_2^{(2)}$.

Процес продовжується до тих пір, коли не буде досягнуто збіжності оцінок параметрів моделі з заданою точністю.

Алгоритм двокрокової процедури базується на такому.

Крок 1. Параметри (8.10) оцінюються 1МНК для $\hat{\rho} = \frac{-(a_2 \rho)}{a_2}$, коли

береться відношення коефіцієнта при змінній x_{t-1} до коефіцієнта при змінній 1МНК.

Крок 2. На основі $\rho = \hat{\rho}$ перетворюється вхідна інформація $(y_t - \hat{\rho} y_{t-1})$ і $(x_t - \hat{\rho} x_{t-1})$, для якої будується модель (8.10) за допомогою 1МНК.

Метод інструментальних змінних використовується тоді, коли залишки не автокорельовані, але існує залежність пояснювальних змінних із залишками. Якщо, наприклад, модель має вигляд $y_t = a_0 + a_1 x_t + a_2 x_{t-1} + a_3 y_{t-1} + u_t$, то можна замість змінної y_{t-1} , яка за припущенням не корельована із пояснювальними змінними, використовувати як інструментальну змінну \hat{y}_{t-1} , що розраховується за допомогою 1МНК як функція $\hat{y}_{t-1} = f(x_1)$.

Оцінка параметрів моделі з лагом на основі **алгоритму Уолліса** складається з трьох етапів.

На *першому етапі* оцінка параметрів виконується на основі метода інструментальних змінних, де x_{t-1} використовується як інструментальна змінна для y_{t-1} .

На *другому етапі* обчислюють коефіцієнт автокореляції r з урахуванням поправки на зміщення.

На *третьому етапі* за допомогою матриці $s = f(r)$ обчислюють оцінку вектора \hat{a} узагальненим методом найменших квадратів (методом Ейткена).

Приклад. (може не треба!!!)

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Що таке лаг і що означає "лагова змінна"?
2. Привести приклади економічних процесів, де необхідно врахувати лаг.
3. Які регресійні моделі називають авторегресійними та дистрибутивно-лаговими?
4. Чим відрізняється модель розподіленого лагу від узагальненої моделі розподіленого лагу?

5. Побудуйте взаємну кореляційну функцію для таких взаємопов'язаних часових рядів:

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Національний дохід (грош. од.)	1,3	1,4	1,6	1,8	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6	2,7
Основні виробничі фонди (грош. од.)	3,2	3,3	3,5	4,3	4,6	4,7	5,2	5,3	5,6	5,8

Визначіть значення «лагу» або «лагів» і побудуйте модель розподіленого лагу.

6. Які проблеми виникають при оцінюванні параметрів дистрибутивно-лагових і авторегресійних моделей?
7. Які гіпотези висувуються щодо залишків лагових моделей?
8. Якими методами оцінюються параметри дистрибутивно-лагових і авторегресійних моделей?
9. Яку схему розподіленого лагу запропонував Койк?
10. Виконайте квазірізницеві перетворення даних за Койком, якщо відомо:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_t	10,8	10,5	10,9	11,1	12,4	12,7	13,6	13,8	14,6	16,4
X_t	9,7	9,9	10,5	11,5	13,6	13,9	14,6	14,8	16,7	18,3
u_t	0,1	0,3	0,6	-0,2	0,3	-0,6	0,8	0,7	0,3	-0,2

Необхідно побудувати такі моделі:

а) $y_t = a_0 + a_1x_t + u_t$;

б) $y_t = a_0 + a_1x_t + a_2x_{t-1} + u_t$.

11. Виконайте оцінку параметрів моделі а) завдання 10 з допомогою 1МНК і методом Ейткена. Проаналізуйте результати.
12. Які гіпотези відносно залишків можуть мати місце при оцінці параметрів лагової моделі?
13. Перерахувати методи оцінки параметрів моделі розподіленого лагу.
14. У якому випадку для оцінки параметрів лагової моделі може бути використаний 1МНК?
15. Пояснити принципову суть ітеративного методу.
16. На чому базується двокрокова процедура у динамічних моделях?
17. Коли використовується метод інструментальних змінних і яка його головна ідея?
18. Пояснити принципову суть алгоритму Уолліса.
19. Побудуйте модель $y_t = ay_{t-1} + u_t$, коли $Y_t = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.
20. Коли застосовується матриця

$$V = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1 + \lambda^2 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 + \lambda^2 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 + \lambda^2 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Як знайти λ ?

21. Опишіть алгоритм ітеративного методу для оцінювання параметрів моделі:

$$y_t = a_0(1 - \rho) + (a_1 + \rho)y_{t-1} - a_1\rho y_{t-2} + a_2x_t - a_2\rho x_{t-1} + \varepsilon_t.$$

22. Опишіть трикрокову процедуру оцінювання за Уоллісом.

Розділ 9. Системи одночасних структурних рівнянь

9.1. Системи рівнянь при побудові економетричних моделей

Економічні процеси і явища характеризуються складною системою зв'язків між чинниками. Ці зв'язки в ряді випадків слід описати **моделіми**, які побудовані на основі системи рівнянь. Оскільки найчастіше вони характеризують економічні процеси і явища, які відбуваються одночасно, то всі ці рівняння мають спільний зв'язок і називаються **системою одночасних (симультативних) структурних рівнянь**. Наведемо два приклади таких економетричних моделей, які використовуються для кількісного взаємозв'язку показників на макро- і мікрорівні.

Так, залежність обсягу національного доходу від основних виробничих фондів, робочої сили і матеріальних ресурсів відповідає економетричній моделі на основі системи одночасних структурних рівнянь, яку наведемо у загальній формі:

$$\begin{cases} X_t = f(F_t, L_t, u_t); \\ M_t = f(X_t, v_t); \\ Y_t = X_t - M_t, \end{cases} \quad (9.1)$$

де X_t - випуск продукції; F_t - основні виробничі фонди; L_t - робоча сила; M_t - матеріальні ресурси; Y_t - валовий внутрішній продукт; u_t, v_t - залишки; t - період часу.

Змінні X_t і M_t виражаються через параметри a_i та b_i , які підлягають знаходженню. Два перших рівняння (9.1) є регресійними, а третє – тотожність.

Взаємозв'язок темпів зниження собівартості продукції на підприємстві з темпами росту продуктивності праці та підвищенням заробітної плати можна визначити на основі економетричної моделі, яка також описується системою одночасних структурних рівнянь:

$$\begin{cases} T_c = f(T_n, T_3, u); \\ T_c = k_1 T_3, \end{cases} \quad (9.2)$$

де T_c - індекс зниження собівартості продукції; T_n - темпи росту продуктивності праці; T_3 - темпи росту заробітної плати; u - залишки; k_1 - рівень співвідношення між темпами зміни собівартості продукції і заробітної плати.

Змінні T_n і T_3 виражаються через розшукувані параметри. Модель містить два рівняння, одне з них є регресійними, а друге – тотожність.

Моделі (9.1) і (9.2) – найпростіші. Вони можуть бути доповненими лаговими змінними.

Узагальнюючи розглянуті моделі та розповсюджуючи їх на інші приклади, можна сказати, що взаємозв'язки між змінними можуть бути *стохастичними* і описуватися регресійними рівняннями та *детермінованими* і відповідати тотожностям.

Системи одночасних структурних рівнянь найчастіше включають *лінійні рівняння*, а нелінійність зв'язків здебільшого апроксимується лінійними співвідношеннями. *Динаміка* зв'язків між показниками враховується за допомогою часових лагів або лагових змінних.

Система одночасних рівнянь у матричній формі може бути записана у вигляді:

$$Y = AY + BX + u, \quad (9.3)$$

де Y - матриця (вектор) залежних змінних; X - матриця незалежних змінних; u - матриця залишків; A - матриця коефіцієнтів при змінних Y розміром $k \times k$; B - матриця коефіцієнтів при змінних X розміром $k \times m$.

Економетрична модель (9.3) відображає структуру зв'язків між змінними і тому називається **структурною формою економетричної моделі**.

Якщо кожне рівняння системи (9.3) розв'язати відносно Y , то одержимо зведену форму моделі, яка має вигляд:

$$Y = RX + v, \quad (9.4)$$

де v - лінійна комбінація залишків u ; R - матриця оцінок параметрів, якої за допомогою одиничної матриці E можна надати вид

$$R = (E - A)^{-1} B. \quad (9.5)$$

До оцінок параметрів моделей (9.3) і (9.4) може бути застосований 1МНК, який приводить до зміщення оцінок параметрів.

9.2. Ідентифікація моделі. Рекурсивні системи

Чисельна оцінка параметрів моделі на основі одночасних структурних рівнянь пов'язана з проблемою ідентифікації. Якщо ніяка лінійна комбінація рівнянь структурної форми не може привести до рівняння, що має ті самі змінні, як і деяке рівняння в структурній формі, то модель буде ідентифікованою.

Необхідна умова ідентифікації системи – виконання такої нерівності для кожного рівня моделі (9.3):

$$k_s - 1 \leq m - m_s, \quad (9.6)$$

де k_s - кількість ендогенних змінних у s -му рівнянні структурної форми; m - загальна кількість екзогенних змінних моделі; m_s - кількість екзогенних змінних, які не входять в s -те рівняння структурної форми моделі.

Зауважимо, що змінні, які містяться в правій частині системи рівнянь (9.3) або (9.4), є наперед заданими (вхідними) і називаються екзогенними. Змінні, які знаходяться в лівій частині рівнянь і обчислюються в результаті реалізації моделі, називаються ендогенними.

Для ідентифікації моделей зведена форма (9.4) визначається однозначно.

Якщо співвідношення (9.6) виконується як рівність, то відповідне рівняння є точно ідентифікованим, а коли як нерівність, то це рівняння є надідентифікованим.

Коли в структурі форми моделі (9.3) матриця A при екзогенній змінній y є трикутною, а залишки характеризуються діагональною матрицею, то така система рівнянь називається рекурсивною. Для знаходження її рішення відносно невідомих параметрів застосовувати 1МНК.

9.3. Методи оцінки параметрів моделі на основі системи рівнянь

Існують альтернативні методи оцінки параметрів моделей, оснований на системах одночасних структурних рівнянь, які порівняно з 1МНК дозволяють уникнути зміщення. До таких методів відносяться: непрямий метод найменших квадратів; двокроковий метод найменших квадратів; трикроковий метод найменших квадратів. Розглянемо суть даних методів.

Непрямий метод найменших квадратів (НМНК) використовується у випадку, коли кожне рівняння моделі є точно ідентифікованим. Алгоритм методу складається з чотирьох кроків.

Крок 1. Перевіряється умова ідентифікованості (9.6) для кожного рівняння. При виконанні умови виконується перехід до наступного кроку.

Крок 2. Здійснюється перехід від структурної форми моделі (9.3) до зведеної (9.4).

Крок 3. Дається оцінка параметрів кожного рівняння зведеної форми моделі 1МНК.

Крок 4. Розраховуються оцінки параметрів рівнянь структурної форми на підставі співвідношення $R = -A^{-1}B$.

Двокроковий метод найменших квадратів (2МНК) застосовується тоді, коли рівняння структурної форми моделі (9.3) надідентифіковані і НМНК застосовувати не можна, а користуватись 1МНК недоцільно. 2МНК призначений для оцінки параметрів окремих рівнянь системи моделі.

Ідея методу полягає в тому, щоб очистити поточні ендогенні змінні від стохастичної складової, бо вони пов'язані із залишками.

Розглянемо 2МНК для загальної економетричної моделі. Нехай окреме рівняння має вигляд:

$$Y = Y_1 a + X_1 b + u,$$

де Y - вектор ендогенної змінної розміром $(n \times 1)$; Y_1 - матриця поточних екзогенних змінних, які входять в праву частину рівняння розміром $(n \times r)$; X_1 - матриця екзогенних змінних розміром $(n \times k)$; a - вектор структурних параметрів розміром $(r \times 1)$, який стосується змінних матриці Y_1 ; b - вектор $(k \times 1)$, який застосовується до змінної X_1 ; u - вектор залишків розміром $(n \times 1)$.

На першому кроці за допомогою 1МНК оцінюються параметри кожного рівняння регресії $\hat{Y}_1 = f(X_1)$. Заміна елементів матриці Y_1 елементами матриці \hat{Y}_1 в рівняннях моделі допоможе звільнитись від кореляції Y_1 та u . Розрахунок елементів матриці \hat{Y}_1 виконується на основі співвідношення:

$$\hat{Y}_1 = X(X'X)^{-1}X'Y_1, \quad (9.8)$$

де X - матриця, яка включає екзогенні змінні даного рівняння X_1 та значення екзогенних змінних, які не ввійшли в це рівняння.

На другому кроці знаходиться залежність \hat{Y}_1 від Y та X_1 . Це приводить до процедури оцінювання системи рівнянь 2МНК у вигляді:

$$\hat{\delta} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y \\ X_1'Y \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

Визначаються асимптотичні стандартні помилки знайдених оцінок параметрів рівняння та довірчі інтервали:

$$S \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \sqrt{\sigma^2 Q_s^{-1}}; \quad (9.10)$$

$$\hat{a} - t_{(\alpha)}S \leq a \leq \hat{a} + t_{(\alpha)}S; \quad \hat{b} - t_{(\alpha)}S \leq b \leq \hat{b} + t_{(\alpha)}S.$$

Приклад 9.1. Результати спостережень надані у вигляді таких матриць даних:

$$Y'Y = \begin{pmatrix} 20 & 15 & -5 \\ 15 & 60 & -45 \\ -5 & -45 & -70 \end{pmatrix}; \quad Y'X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 12 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & 10 \end{pmatrix}; \quad X'X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель, яка може бути побудована на основі цих даних, складається з чотирьох рівнянь, перше з яких має вигляд:

$$Y_{1t} = a_{12}Y_{2t} + a_{13}Y_{3t} + b_{11}X_{1t} + u_{1t}.$$

Модель має ще три екзогені змінні - X_{2t}, X_{3t}, X_{4t} , які входять в інші рівняння.

Необхідно знайти оцінки параметрів наведеного рівняння за допомогою двокрокового методу найменших квадратів (2МНК) та оцінити їх стандартні помилки, якщо дисперсія залишків дорівнює $\sigma_u^2 = 0,6$.

Розв'язання.

1. Перевіримо рівняння моделі на ідентифікованість. Для цього розглядаємо нерівність:

$$k_s - 1 \leq m - m_s,$$

де k_s - кількість ендогенних змінних даного рівня; $k_s = 3$; m - загальна кількість екзогенних змінних $m = 4$; m_s - кількість екзогенних змінних розглядаємого рівняння моделі, $m_s = 1$: $3 - 1 < 4 - 1$.

Таким чином, наведене рівняння моделі є надідентифікованим і для оцінки параметрів потребує використання 2МНК.

2. Запишемо оператор оцінювання параметрів 2МНК:

$$\hat{\delta} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y \\ X_1'Y \end{bmatrix}.$$

В цьому операторі: $Y = Y_{1t}$ - вектор ендогенної змінної; $Y_1 = (Y_{2t}, Y_{3t})$ - матриця поточних екзогенних змінних, які входять в праву частину рівняння; $X = (X_{1t}, X_{2t}, X_{3t}, X_{4t})$ - матриця всіх екзогенних змінних моделі; $X_1 = X_{1t}$ - матриця екзогенних змінних даного рівняння.

3. Знайдемо добуток матриці згідно з оператором оцінювання 2МНК:

$$Y_1'X = \begin{pmatrix} Y_{2t} \\ Y_{3t} \end{pmatrix} (X_{1t} \ X_{2t} \ X_{3t} \ X_{4t}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & 10 \end{pmatrix};$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix};$$

$$Y_1'X(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -2 \\ 12 & -12 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & -50 \\ -50 & 58 \end{pmatrix};$$

$$Y_1'X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_1'Y_1 = (0,0); \quad X_1'X_1 = 1.$$

Звідси блочна матриця має вигляд:

$$Q = \begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & -50 & 0 \\ -50 & 58 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1695 & 0,1462 & 0 \\ 0,1462 & 0,1433 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Добуток матриць в правій частині оператора:

$$Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad X_1'Y_1 = 2.$$

4. Визначимо оцінки параметрів рівняння:

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1695 & 0,1462 & 0 \\ 0,1462 & 0,1433 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = (1,28 \ 1,04 \ 2).$$

Перше рівняння економетричної моделі запишеться так:

$$Y_{1t} = 1,28Y_{2t} + 1,04Y_{3t} + 2Y_{1t}.$$

5. Визначимо асимптотичні стандартні помилки знайдених оцінок:

$$S_{\hat{a}_{11}} = \sqrt{0,6 \times c_{11}} = \sqrt{0,6 \times 0,1695} = 0,32;$$

$$S_{\hat{a}_{22}} = \sqrt{0,6 \times c_{22}} = \sqrt{0,6 \times 0,1433} = 0,29;$$

$$S_{\hat{a}_{33}} = \sqrt{0,6 \times c_{33}} = \sqrt{0,6 \times 1} = 0,78.$$

Стандартні помилки щодо абсолютного значення оцінок становить відповідно:

$$\frac{0,32}{1,28} \times 100 = 25,0\%, \quad \frac{0,29}{1,04} \times 100 = 27,9\%, \quad \frac{0,78}{2} \times 100 = 39,0\%.$$

А це свідчить про те, що оцінки параметрів рівняння є зміщеними і неефективними.

Трикроковий метод найменших квадратів (ЗМНК). Розглянуті вище два методи – непрямий і двокроковий – застосовуються для оцінки параметрів кожного окремого рівняння моделі. ЗМНК призначений для одночасної оцінки параметрів всіх рівнянь моделі.

Зельнер і Гейл запропонували трикроковий метод найменших квадратів, який за певних обставин є більш ефективним, ніж двокроковий.

Ідея методу полягає у такому.

На *першому кроці* застосовується 2МНК при оцінюванні параметрів $\delta_s = \begin{bmatrix} a_s \\ b_s \end{bmatrix}$ для кожного структурного рівняння систем

$$Y_s = Y_s a_s + X_s b_s + u_s, \quad s = \overline{1, r} \quad (9.11)$$

де Y_s - матриця значень ендогенної змінної s -го рівняння розміром $(n \times r)$; X_s - матриця екзогенних змінних s -го рівняння розміром $(n \times k)$; a_s і b_s - вектори параметрів; u_s - вектори залишків; r - кількість ендогенних змінних; k - кількість екзогенних змінних.

На *другому кроці* знайдені оцінки δ_s підставляються у модифіковані рівняння на основі (9.11), які об'єднують дві матриці Y_s і X_s у правій частині в матрицю Z_s . Перепишемо (11) у вигляді:

$$Y_s = Z_s \delta_s + u_s, \quad s = \overline{1, r},$$

де $Z_s = [Y_s X_s]$ і $\delta_s = \begin{bmatrix} a_s \\ b_s \end{bmatrix}$.

На *третьому кроці* обчислюються значення \hat{Y}_s , з допомогою яких можна знайти залишки \hat{u}_s ($s = \overline{1, r}$). На підставі значень \hat{u}_s визначаються дисперсії залишків S_{rj}^2 для кожного рівняння та розраховується оператор оцінювання

$$\hat{\delta} = \begin{bmatrix} \hat{a}_s \\ \hat{b}_s \end{bmatrix};$$

$$\hat{\delta} = \begin{bmatrix} (S_{11}^2)^{-1} Z_1' (X'X)^{-1} X'Z_1 & \dots & (S_{1r}^2)^{-1} Z_1' (X'X)^{-1} X'Z_r \\ & \dots & \\ (S_{r1}^2)^{-1} Z_r' (X'X)^{-1} X'Z_1 & \dots & (S_{rr}^2)^{-1} Z_r' (X'X)^{-1} X'Z_r \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^r (S_{1j}^2)^{-1} Z_1' X (X'X)^{-1} X'Y_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^r (S_{rj}^2)^{-1} Z_r' X (X'X)^{-1} X'Y_j \end{bmatrix}.$$

Для практичного використання ЗМНК необхідно виконання вимог:

- 1) розпочинаючи оцінювати параметри моделі, необхідно вилучити всі тотожності;
- 2) виключити з системи кожне неідентифіковане рівняння;
- 3) за наявності серед рівнянь системи точно ідентифікованих та надідентифікованих рівнянь доцільно застосовувати ЗМНК до кожної з груп рівнянь окремо;
- 4) якщо група надідентифікованих рівнянь має тільки одне рівняння, то ЗМНК перетворюється на 2МНК;
- 5) в разі блочно-діагональної матриці коваріацій залишків використання ЗМНК може бути застосовано для кожної групи рівнянь, які відповідають одному блоку.

9.4. Прогноз та його довірчі інтервали

Одна з головних цілей побудови економетричних моделей на основі системи рівнянь заключається в тому, щоб одержати за допомогою моделі прогноз залежних змінних за певних припущень відносно майбутніх значень пояснювальних змінних.

Точковий прогноз залежних змінних при заданих значеннях пояснювальних змінних визначається на основі приведеної форми економетричної моделі:

$$Y_f = \hat{R}X_f,$$

де X_f - вектор прогнозних значень пояснювальних змінних; \hat{R} - матриця оцінок параметрів.

Визначення довірчих інтервалів для цього прогнозу залежить від методу, за допомогою якого було одержано матрицю \hat{R} .

Довірчі інтервали для кожної залежної змінної задаються співвідношенням

$$\hat{Y}_{jf} \pm t_{(\alpha/2)} \sqrt{S_{ss}^2},$$

де S_{ss}^2 - дисперсія залишків s -го рівняння моделі; $t_{(\alpha/2)} = F_{(\alpha)}$.

Довірчі інтервали для всіх залежних змінних визначаються за формулою:

$$Y_{sf} = \hat{Y}_{jf} \pm \sqrt{\frac{[1 + X'_f (X'X)^{-1} X_f] n - k}{n - k - r + 1}} \times S_{ss}^2,$$

де S_{ss}^2 - незміщена дисперсія залишків всіх рівнянь.

Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Що називають системою одночасних структурних рівнянь?
2. Навести приклади економетричних моделей, які побудовані на основі системи рівнянь.
3. Запишіть в загальному вигляді структурну форму моделі на основі одночасних рівнянь. Пояснити її структуру.
4. Що означає зведена форма моделі? Як її одержати?
5. Які змінні моделі називають екзогенними? Ендогенними?
6. Записати умову ідентифікованості системи рівнянь.
7. Яка система рівнянь називається точно ідентифікованою?
8. Яка система рівнянь називається надідентифікованою?
9. Дати визначення рекурсивних систем.
10. Які методи використовуються для оцінки параметрів моделей на основі системи рівнянь?
11. Який метод оцінки параметрів можна застосувати, коли всі рівняння моделі є точно ідентифікованими? Пояснити суть методу.
12. Який метод оцінки параметрів можна застосувати, якщо рівняння моделі є надідентифікованими? Пояснити суть методу.
13. На основі якого методу можна одночасно оцінити параметри всіх рівнянь моделі? Пояснити суть методу.
14. Розгляньте питання ідентифікованості для кожного рівняння моделі:

$$\begin{aligned}
Y_{1t} - Y_{1(t-1)} &= a_{10} + a_{11}[Y_{1t} + Y_{1(t-1)}] + a_{12}[Y_{2t} + Y_{2(t-1)}] + u_{1t}, \\
Y_{2t} - Y_{2(t-1)} &= a_{20} + a_{22}[Y_{2t} + Y_{2(t-1)}] + a_{23}[Y_{3t} + Y_{3(t-1)}] + u_{2t}, \\
Y_{3t} - Y_{3(t-1)} &= a_{30} + a_{31}[Y_{1t} + Y_{1(t-1)}] + a_{32}[Y_{2t} + Y_{2(t-1)}] + \\
&+ a_{33}[Y_{3t} + Y_{3(t-1)}] + u_{3t}.
\end{aligned}$$

15. Нехай для моделі, яка має таку структурну форму:

$$Y_{1t} = a_{12}Y_{2t} + b_{11}X_{1t} + u_{1t};$$

$$Y_{2t} = a_{21}Y_{1t} + b_{22}X_{2t} + b_{23}X_{3t} + u_{2t}$$

Розраховані оцінки параметрів зведеної форми

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 2 \\ 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

При цьому відомо ось що:

а) оцінки дисперсій помилок коефіцієнтів першого рівняння зведеної форми:

1; 0,5; 0,1;

б) коваріації оцінок відсутні;

в) дисперсія залишків першого рівняння дорівнює 2,0.

На основі цієї інформації запишіть систему рівнянь 2МНК для оцінки параметрів першого структурного рівняння і обчисліть ці оцінки.

16. Знайдіть оцінки параметрів моделі, яка складається з двох рівнянь:

$$Y_{1t} = a_{12}Y_{2t} + b_{11}X_{1t} + u_{1t};$$

$$Y_{2t} = a_{21}Y_{1t} + b_{22}X_{2t} + b_{23}X_{3t} + u_{2t}.$$

1) Використайте для оцінки параметрів 1МНК;

2) Використайте для оцінки параметрів 2МНК.

Матриця сум добутоків вихідних даних дорівнює:

$$\begin{matrix} Y_1 \\ Y_2 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 100 & 200 & 30 & 20 & 40 \\ 200 & 900 & 0 & 50 & 160 \\ 30 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 20 & 50 & 0 & 50 & 0 \\ 40 & 160 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}.$$

Оцінка дисперсій відхилення для 1МНК – 1,1; для 2МНК – 1,4. Визначіть стандартні помилки параметрів моделі і, базуючись на оцінці дисперсій залишків, зробіть висновки щодо оцінок параметрів 1МНК і 2МНК.

Додаток 1. Нормальний розподіл.

Ординати Y для $\pm z$ і площа A між $-z$ і $+z$ під кривою нормального розподілу z		X	Y	A	1-A	z	X	Y	A	1-A
0		m	0,399	0,0000	1	$\pm 1,50$	$m \pm 1,50s$	0,1295	0,8664	0,1336
$\pm 0,05$		$m \pm 0,05s$	0,398	0,0399	0,9601	$\pm 1,55$	$m \pm 1,55s$	0,1200	0,8789	0,1211
$\pm 0,10$		$m \pm 0,10s$	0,397	0,0797	0,9203	$\pm 1,60$	$m \pm 1,60s$	0,1109	0,8904	0,1096
$\pm 0,15$		$m \pm 0,15s$	0,394	0,1192	0,8808	$\pm 1,65$	$m \pm 1,65s$	0,1023	0,9011	0,0989
$\pm 0,20$		$m \pm 0,20s$	0,391	0,1585	0,8415	$\pm 1,70$	$m \pm 1,70s$	0,0940	0,9109	0,0891
$\pm 0,25$		$m \pm 0,25s$	0,387	0,1974	0,8026	$\pm 1,75$	$m \pm 1,75s$	0,0863	0,9199	0,0801
$\pm 0,30$		$m \pm 0,30s$	0,381	0,2358	0,7642	$\pm 1,80$	$m \pm 1,80s$	0,0790	0,9281	0,0719
$\pm 0,35$		$m \pm 0,35s$	0,375	0,2737	0,7263	$\pm 1,85$	$m \pm 1,85s$	0,0721	0,9357	0,0643
$\pm 0,40$		$m \pm 0,40s$	0,368	0,3108	0,6892	$\pm 1,90$	$m \pm 1,90s$	0,0656	0,9426	0,0574
$\pm 0,45$		$m \pm 0,45s$	0,361	0,3473	0,6527	$\pm 1,95$	$m \pm 1,95s$	0,0596	0,9488	0,0512
$\pm 0,50$		$m \pm 0,50s$	0,352	0,3829	0,6171	$\pm 2,00$	$m \pm 2,00s$	0,0540	0,9545	0,0455
$\pm 0,55$		$m \pm 0,55s$	0,343	0,4177	0,5823	$\pm 2,05$	$m \pm 2,05s$	0,0488	0,9596	0,0404
$\pm 0,60$		$m \pm 0,60s$	0,333	0,4515	0,5485	$\pm 2,10$	$m \pm 2,10s$	0,0440	0,9643	0,0357
$\pm 0,65$		$m \pm 0,65s$	0,323	0,4843	0,5157	$\pm 2,15$	$m \pm 2,15s$	0,0396	0,9684	0,0316
$\pm 0,70$		$m \pm 0,70s$	0,312	0,5161	0,4839	$\pm 2,20$	$m \pm 2,20s$	0,0355	0,9722	0,0278
$\pm 0,90$		$m \pm 0,90s$	0,266	0,6319	0,3681	$\pm 2,40$	$m \pm 2,40s$	0,0224	0,9836	0,0164
$\pm 0,95$		$m \pm 0,95s$	0,254	0,6579	0,3421	$\pm 2,45$	$m \pm 2,45s$	0,0198	0,9857	0,0143
$\pm 1,00$		$m \pm 1,00s$	0,242	0,6827	0,3173	$\pm 2,50$	$m \pm 2,50s$	0,0175	0,9876	0,0124
$\pm 1,05$		$m \pm 1,05s$	0,230	0,7063	0,2937	$\pm 2,55$	$m \pm 2,55s$	0,0154	0,9892	0,0108
$\pm 1,10$		$m \pm 1,10s$	0,218	0,7287	0,2713	$\pm 2,60$	$m \pm 2,60s$	0,0136	0,9907	0,0093
$\pm 1,15$		$m \pm 1,15s$	0,206	0,7499	0,2501	$\pm 2,65$	$m \pm 2,65s$	0,0119	0,9920	0,0080
$\pm 1,20$		$m \pm 1,20s$	0,194	0,7699	0,2301	$\pm 2,70$	$m \pm 2,70s$	0,0104	0,9931	0,0069
$\pm 1,25$		$m \pm 1,25s$	0,183	0,7887	0,2113	$\pm 2,75$	$m \pm 2,75s$	0,0091	0,9940	0,0060
$\pm 1,30$		$m \pm 1,30s$	0,171	0,8064	0,1936	$\pm 2,80$	$m \pm 2,80s$	0,0079	0,9949	0,0051
$\pm 1,35$		$m \pm 1,35s$	0,160	0,8230	0,1770	$\pm 2,85$	$m \pm 2,85s$	0,0069	0,9956	0,0044
$\pm 1,40$		$m \pm 1,40s$	0,150	0,8385	0,1615	$\pm 2,90$	$m \pm 2,90s$	0,0060	0,9963	0,0037
$\pm 1,45$		$m \pm 1,45s$	0,139	0,8529	0,1471	$\pm 2,95$	$m \pm 2,95s$	0,0051	0,9968	0,0032
$\pm 1,50$		$m \pm 1,50s$	0,130	0,8664	0,1336	$\pm 3,00$	$m \pm 3,00s$	0,0044	0,9973	0,0027
						$\pm 4,00$	$m \pm 4,00s$	0,001	0,99994	0,00006
						$\pm 5,00$	$m \pm 5,00s$	0,000001	0,9999994	0,0000006
$\pm 0,000$		m	0,3989	0,0000	1,000	$\pm 1,036$	$m \pm 1,036s$	0,2331	0,7000	0,3000
$\pm 0,126$		$m \pm 0,126s$	0,3958	0,1000	0,9000	$\pm 1,282$	$m \pm 1,282s$	0,1755	0,8000	0,2000
$\pm 0,253$		$m \pm 0,253s$	0,3853	0,2000	0,8000	$\pm 1,645$	$m \pm 1,645s$	0,1031	0,9000	0,1000
$\pm 0,385$		$m \pm 0,385s$	0,3704	0,3000	0,7000	$\pm 1,960$	$m \pm 1,960s$	0,0584	0,9500	0,0500
$\pm 0,524$		$m \pm 0,524s$	0,3477	0,4000	0,6000	$\pm 2,576$	$m \pm 2,576s$	0,0145	0,9900	0,0100
$\pm 0,674$		$m \pm 0,674s$	0,3178	0,5000	0,5000	$\pm 3,291$	$m \pm 3,291s$	0,0018	0,9990	0,0010
$\pm 0,842$		$m \pm 0,842s$	0,2800	0,6000	0,4000	$\pm 3,891$	$m \pm 3,891s$	0,0002	0,9999	0,0001

Додаток 2. Процентилі t розподілу

df	$t_{0,60}$	$t_{0,70}$	$t_{0,80}$	$t_{0,90}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$	$t_{0,995}$
1.	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	3,657
2.	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3.	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4.	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	4,747	4,604
5.	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6.	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7.	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8.	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9.	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10.	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11.	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12.	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13.	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14.	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15.	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16.	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17.	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18.	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19.	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20.	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21.	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22.	0,256	0,532	0,858	1,321	1,711	2,074	2,508	2,819
23.	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24.	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25.	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26.	0,256	0,531	0,856	1,316	1,706	2,056	2,479	2,779
27.	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28.	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29.	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30.	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40.	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60.	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120.	0,254	0,526	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576
df	$-t_{0,40}$	$-t_{0,30}$	$-t_{0,20}$	$-t_{0,10}$	$-t_{0,05}$	$-t_{0,025}$	$-t_{0,01}$	$-t_{0,005}$

Додаток 3. Процентилі χ^2 розподілу

df	0,5	1	2,5	5	10	90	95	97,5	99	99,5
1	0,000039	0,00016	0,00098	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,05006	0,1026	0,2107	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
120	83,83	86,92	91,58	95,70	100,62	140,23	146,57	152,21	158,95	163,64

Додаток 4. F-розподіл, 5%-ві точки ($F_{0,95}$)

Ступінь свободи знаменник	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	22,9	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,96	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,89	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,97	1,82	1,77	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Додаток 5. F-розподіл, 1%-ві точки ($F_{0,99}$)

Ступінь свободи знаменн ик	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4,05 2	5,00 0	5,40 3	5,62 5	5,76 4	5,85 9	5,92 8	5,98 2	6,02 3	6,05 6	6,10 6	6,15 7	6,20 9	6,25 3	6,26 1	6,28 7	6,31 3	6,33 9	6,36 6
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,2	26,9	26,7	26,6	26,4	26,4	26,3	26,2	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,2	14,0	13,9	13,7	13,7	13,7	13,6	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,89	9,72	9,55	9,47	9,29	9,29	9,20	9,11	9,02
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,14	7,14	7,06	6,97	6,88
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,91	5,91	5,82	5,74	4,65
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,12	5,12	5,03	4,95	4,86
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,57	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,17	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,86	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,62	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,43	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,70	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,27	3,27	3,18	3,09	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,13	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,02	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	2,92	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,84	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,19	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,76	2,76	2,67	2,58	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,69	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,64	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,58	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,54	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,49	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,53	2,45	2,36	2,27	2,17
26	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00