БЄЛЯЄВ О.В.

ВВЕДЕННЯ В ВИЩУ МАТЕМАТИКУ

ЗМІСТ

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Математичний аналіз, як розділ курсу вищої математики є класичною його частиною і тому мало змінюється с точки зору його викладання.

Зазвичай, він містить у собі всі основні поняття вищої математики, які потім зустрічаються у наступних більш спеціалізованих курсах. Оскільки таких понять набирається досить велика кількість, то викладання математичного аналізу зводиться до перерахування цієї кількості визначень та теорем, среди яких, природно, зустрічаються і вельми складні.

Пропонований нижче конспект курсу лекцій з математичного аналізу ґрунтується дещо на іншому принципі. Коротко цей принцип можна охарактеризувати таким чином: спочатку визначається список основних теорем, а потім вводяться тільки ті поняття, які необхідні для доведення теорем з вибраного списку.

В результаті всі основні теореми стандартного курсу доводяться повністю. Подібний підхід дозволяє значно скоротити обсяг курсу за рахунок цілого ряду понять і фактів. Всі ці поняття, безумовно, необхідні для математика, який бажає мати серйозний апарат для дослідження математичних проблем в майбутньому. Однак, для фахівця, який не є чистим математиком, набагато важливіше мати тверду теоретичну основу для прикладних знань. Така основа може виникнути тільки в разі, якщо теореми не тільки запам'ятовуються на рівні формулювань, але і доводяться.

Більш конкретно характеризуючи пропонований курс, скажімо, наприклад, що в ньому властивість компактності відрізка використовується тільки як властивість вкладеної системи відрізків мати спільну точку. Ні класичного визначення компактності і, відповідно, леми Бореля - Лебега, ні секвенційної компактності в ньому немає, хоч і доводиться існування збіжної підпослідовності обмеженої послідовності. Крім того, найважча теорема диференціального обчислення - теорема Тейлора - доводиться тривіальною інтеграцією по частинах в інтегральному численні.

В решті решт, ми опускаємо докази численних властивостей о-малого на основі класичного визначення, замінюючи о-мале даної функції добутком цієї функції на нескінченно малу.

Стиль лекцій досить лаконічний, оскільки, по-перше, ми не прагнули зробити посібник, що повністю заміняє усні лекції викладача, а по-друге, в результаті в посібнику чіткіше, ніж в підручниках підкреслені основні ідеї доказів, а кількість прикладів, що ілюструють доведені твердження, мінімальна з тих же міркувань.

§ 1. Аксіоматика множини дійсних чисел.

Визначення 1.1. *Множина* $\mathbb{R}$ *називається множиною дійсних чисел, а його елементи дійсними числами, якщо виконані наступні умови (аксіоми дійсних чисел):*

(I) Аксіоми додавання.

Визначене відображення (операція додавання):

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

що зіставляє кожній впорядкованій парі $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *деякий елемент,* $x + y \in \mathbb{R}$, *що називається сумою* x *і* y.

При цьому виконані наступні умови:

1. *Існує елемент 0 (нуль) такий, що для любого* $x \in \mathbb{R}$

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

2. *Для любого елементу* $x \in \mathbb{R}$ *існує елемент* $-x \in \mathbb{R}$, *(протилежний до* x*) такий, що*

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3. *Операція "+" асоціативна, тобто для довільних элементів* $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

4. *Операція "+" комутативна, тобто для довільних элементів* $x, y \in \mathbb{R}$

$$x + y = y + x.$$

(II). Аксіоми добутку.

Визначене відображення (операція множення):

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

що зіставляє кожній впорядкованій парі $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *деякий елемент,* $x \cdot y \in \mathbb{R}$, *що називається добутком* x *і* y.

При цьому виконані наступні умови:

1. *Існує елемент 1 (одиниця) такий, що для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

2. *Для любого елементу $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, існує елемент $x^{-1} \in \mathbb{R}$, (обернений до x) такий, що*

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

3. *Операція "$\cdot$" асоціативна, тобто для довільних элементів $x, y, z \in \mathbb{R}$*

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

4. *Операція "$\cdot$" комутативна, тобто для довільних элементів $x, y \in \mathbb{R}$*

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(I, II) Зв'язок додавання і множення.

Множення дистрибутивне по відношенню до додавання, тобто для довільних $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

(III) Аксіоми порядку.

Між двома довільними елементами $, y \in \mathbb{R}$ виконується відношення $x \leq y$ або $y \leq x$ ($\leq$ - "меньше або дорівнює"). При цьому виконуються наступні умови:

1. $x \leq x$.
2. *Якщо $x \leq y$ та $y \leq x$, то $x = y$.*
3. *Якщо $x \leq y$ та $y \leq z$, то $x \leq z$.*

(I, III) Зв'язок додавання та порядку

Для довільних $x, y, z \in \mathbb{R}$

Якщо $x \leq y$, то $x + z \leq y + z$.

(II, III) Зв'язок множення та порядку

Якщо $0 \leq x$ *та* $0 \leq y$, *то* $0 \leq x \cdot y$.

(IV) Аксиома повноти (неперервності).

Якщо X, Y *- непусті підмножини* $\mathbb{R}$ *такі, що для довільних елементів* $x \in X, y \in Y$ *виконується нерівність* $x \leq y$, *то існує такий елемент* $c \in \mathbb{R}$, *що* $x \leq c \leq y$ *для довільних елементів* $x \in X, y \in Y$.

Зауваження 1.1. *Сформульованих вище аксіом достатньо, щоб отримати всі теореми, які далі будуть доведені. В той же час серед аксіом немає зайвих, тобто таких, які можливо вивести з останніх.*

Позначення 1.1.

Множина натуральних чисел - $\mathbb{N}$,

множина цілих чисел - $\mathbb{Z}$,

множина раціональних чисел - $\mathbb{Q}$,

«існує» - $\exists$, *«для любого»* - $\forall$, *«не вірно* $\mathfrak{I}$*»* - $\neg\mathfrak{I}$,

при запису операції множення $x \cdot y$ *знак множення можна опускати.*

Визначення 1.2. *Операція віднімання:*

$$x - y = x + (-y),$$

операція ділення:

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}.$$

Висновок 1.1. *Існує тільки один 0, тільки одна 1, тільки один протилежний елемент, тільки один зворотний елемент.*

Доведення. Нехай існує два *0:* $0_1, 0_2$. Тоді

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2.$$

Аналогічно доводиться єдиність 1. Нехай існує два протилежних елементів $(-x)_1, (-x)_2$ до елементу x. Тоді

$$(-x)_1 + x = (-x)_2 + x = 0 \implies (-x)_1 = (-x)_2 .$$

Аналогічно доводиться єдиність зворотнього елементу.

Висновок 1.2. $0 \cdot x = 0, -(-x) = x, (-1) \cdot x = -x$.

Доведення. $x = (0+1) \cdot x = 0 \cdot x + x \implies 0 = 0 \cdot x$.

$$0 = -(-x) + (-x) = x + (-x) \implies -(-x) = x.$$

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = (-1+1) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

Висновок 1.3. $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Доведення. $(x \cdot y)^{-1} \cdot (x \cdot y) = 1 = x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot (x \cdot y)$.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} = (ad+bc) \cdot (bd)^{-1} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

§ 2. Теорема про вкладені відрізки.

Теорема 2.1.

(а) Для довільної послідовності вкладених відрізків

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

знайдеться точка, $c \in \mathbb{R}$, що належить усім цим відрізкам.

(б) Якщо, крім того, відомо, що для довільного $\varepsilon > 0$ у послідовності відрізків $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ можна знати відрізок довжиною меншою ε, то c- єдина спільна точка всіх відрізків.

Доведення. Зауважимо, що для довільних відрізків $[a_m, b_m], [a_n, b_n]$ у нашій послідовності $a_m \leq b_n$.

Таким чином, для числових множин $A = \{a_n\}, B = \{b_n\}, n \in \mathbb{N}$, виконані умови аксіоми повноти, а тому існує елемент $c \in \mathbb{R}$ такий, що $\forall m, n \ a_m \leq c \leq b_n$, зокрема, $a_n \leq c \leq b_n$, тобто частина (а) теореми доведена.

Якщо припустити, що існують дві спільні для всіх відрізків точки c_1, c_2, то тоді $a_n \le c_1 < c_2 \le b_n$ і ми отримуємо протиріччя з умовою пункту (б) теореми. Тобто, теорема доведена.

§ 3. Границя послідовності.

Визначення 3.1. *Вважається заданою функція f з областю визначеності X і з областю значень Y, якщо кожному $x \in X$ відповідає рівно одне $y \in Y$. Позначається: $y = f(x)$ або $f: x \longrightarrow y$.*

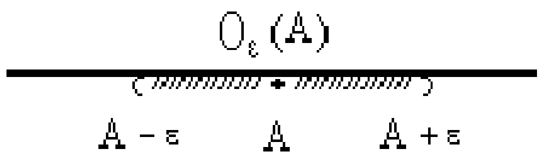
Якщо $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$, то функція називається числовою.

Визначення 3.2. *Функція $x: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ називається послідовністю. Позначається: $x(1) = x_1, x(2) = x_2, \dots, x(n) = x_n, \dots$*

Визначення 3.3. *(а) Число $A \in \mathbb{R}$ називається границею послідовності a_n, якщо*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Позначення: $O_\varepsilon(x)$ – окіл с центром в точці x радіусом ε.



(б) Число $A \in \mathbb{R}$ називається границею послідовності a_n, якщо для довільного околу $O_\varepsilon(A)$, починаючи з деякого номеру N, всі члени послідовності знаходяться в околі $O_\varepsilon(A)$.

Позначення: $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ або $a_n \to A, n \to \infty$ (a_n наближається до A).

Теорема 3.1.

(а) Послідовність не може мати більш ніж одну границю.

(б) Послідовність, що має границю є обмеженою.

Доведення (а) від протилежного. Нехай A_1, A_2 – границі послідовності a_n. Вибираємо околи $O_\varepsilon(A_1)$, $O_\varepsilon(A_2)$, так, щоб вони не перетинались. Тоді, починаючи с деякого номеру N, кожен член послідовності повинен знаходитись в двох околах, що не мають спільних точок, що неможливо.

(б). Нехай $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Починаючи с деякого номеру N, $A - \varepsilon < a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots < A + \varepsilon$, тобто ці елементи обмежені околом $O_\varepsilon(A)$.

Кількість останніх елементів $a_1, a_2, \ldots a_N$ обмежена, отже обмежена і їх множина. В результаті маємо $\forall i\ min\{a_1, a_2, \ldots a_N, A - \varepsilon\} \le a_i \le max\{a_1, a_2, \ldots a_N, A + \varepsilon\}$. Теорема доведена.

Теорема 3.2. *Якщо* $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$.

Доведення. Необхідно довести, що

$$\forall \varepsilon_0 > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ A + B - \varepsilon_0 < a_n + b_n < A + B + \varepsilon_0.$$

Згідно з умовою теореми ми маємо

$$\forall \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1\ A - \frac{\varepsilon_0}{2} < a_n < A + \frac{\varepsilon_0}{2},$$

$$\forall \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} > 0\ \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_2\ B - \frac{\varepsilon_0}{2} < b_n < B + \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Починаючи з номеру $N = max\{N_1, N_2\}$, маємо

$A - \frac{\varepsilon_0}{2} < a_n < A + \frac{\varepsilon_0}{2}$ і $B - \frac{\varepsilon_0}{2} < b_n < B + \frac{\varepsilon_0}{2}$, отже

$$A + B - \varepsilon_0 < a_n + b_n < A + B + \varepsilon_0.$$

Теорема 3.3. *Якщо* $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = AB$.

Лема 3.3.1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - A) = 0$.

Доведення отримаємо, якщо запишемо обидва формальні визначення границь.

Лема 3.3.2. *Добуток нескінченно малої,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *і обмеженої послідовностей,* $|b_n| < C$, *є нескінченно мала послідовність.*

Доведення. Необхідно довести, що

$$\forall \varepsilon_0 > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ |a_n\, b_n| < \varepsilon_0.$$

Згідно з умовою теореми ми маємо

$$\forall \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{C} > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ |a_n| < \frac{\varepsilon_0}{C}, |b_n| < C,$$

тобто, починаючи з номеру N, $|a_n \, b_n| < \varepsilon_0$.

Доведення теореми. Згідно з лемою 3.3.1

$$a_n = A + x_n, b_n = B + y_n,$$

де x_n, y_n - нескінченно малі. Маємо подання послідовності $a_n b_n$ в вигляді суми чотирьох послідовностей:

$$a_n b_n = (A + x_n)(B + y_n) = AB + Ay_n + Bx_n + x_n y_n.$$

Границя константи AB є сама ж константа, всі останні складові є додатки обмежених A, B, x_n (см. теорему 3.1.б) на нескінченно малі.

Теорема 3.4. *Якщо* $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n, B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Доведення.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} + \frac{A}{B} = \frac{a_n - A}{b_n} + \frac{A(B - b_n)}{Bb_n} + \frac{A}{B} = \frac{x_n}{b_n} + \frac{Ay_n}{Bb_n} + \frac{A}{B}$$

і необхідно довести лише, що послідовність $\frac{1}{b_n}$ є обмеженою, а це витікає з обмеженості послідовності b_n і умови $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Теорема 3.5. *Якщо* $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n, B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *і при цьому,*

(а) якщо $A < B$, *то, починаючи з деякого номеру* N, $a_n < b_n$;

(б) якщо, починаючи з деякого номеру N, $a_n \leq b_n$, *то* $A < B$.

Доведення. (а) Виберемо таке ε, щоб околи $O_\varepsilon(A), O_\varepsilon(B)$ не перетинались, тоді, починаючи з деякого номеру N, $a_n < A + \varepsilon < B - \varepsilon < b_n$.

(б) Від протилежного. Нехай $A > B$, тоді згідно з (а) $a_n > b_n$, що неможливо за умовою теореми.

Висновок 3.1. *Якщо* $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *і при цьому,* $a_n \leq c_n \leq b_n$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

§4. Точні верхня і нижня межі.

Визначення 4.1. *Число* c^* *називається точною верхнею межею, якщо виконані наступні умови:*

(а) $\forall x \in X\ x \leq c^*$;

(б) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in X\ \ c^* - \varepsilon < x'$.

Позначення: $c^* = supX$.

Аналогічно,

Визначення 4.2. *Число* c_* *називається точною нижнею межею, якщо виконані наступні умови:*

(а) $\forall x \in X\ x \geq c_*$;

(б) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in X\ \ c_* + \varepsilon > x'$.

Позначення: $c_* = infX$.

Теорема 4.1 (про точну верхню межу). *Довільна непуста обмежена зверху множина* $X \subset \mathbb{R}$ *має точну верхню межу.*

Доведення. Згідно з умовою існує y_0 таке, що $\forall x \in X\ x \leq y_0$. Визначим множину Y як сукупність елементів таких, що $\forall x \in X\ x \leq y$. Отже для множин X, Y виконані умови аксіоми повноти і, таким чином, існує c, таке що:

$$\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leq c \leq y.$$

Доведемо, що число $c = supX$. Умова (а) виконана. Припустимо, що умова (б) не виконана, тобто

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall x' \in X\ \ c - \varepsilon_0 \geq x'.$$

Це означає, що $c - \varepsilon_0 \in Y$, тобто і те, що $c \leq c - \varepsilon_0$, що неможливо.

Теорема 4.2 (достатня умова існування границі). *Нехай послідовність* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *монотонно зростає* $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$ *і обмежена зверху* $\forall n\ a_n \leq M$. *Тоді послідовність має границю:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = sup\{a_n\}$.

Доведення. Необхідно довести, що

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n > N\ c^* - \ \varepsilon < a_n < c^* + \varepsilon,\ (c^* = sup\{a_n\}).$$

Умова $a_n < c^* + \varepsilon$ виконана згідно першої умови визначення $sup\{a_n\}$. Згідно другої умови $\exists N \in \mathbb{N}\ c^* - \varepsilon < a_N$, але послідовність монотонно зростає, отже $\forall n > N\ c^* - \varepsilon < a_n$.

Зауваження 4.1. *Мають місце аналогічні теоремам 4.1, 4.2 теореми про існування точної нижньої межі, а також про існування границі монотонної обмеженої знизу послідовності.*

Теорема 4.3. *Існує границя числової послідовності* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Доведення. Спочатку впевнимось, що послідовність $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ монотонно зменшується.

Лема 4.3 (Нерівність Бернуллі). $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha, n \in \mathbb{N}, \alpha > -1$.

Доведення (математична індукція).

1. Вірно при $n = 1$.
2. Якщо вірно для $n = k$, то вірно і для $n = k + 1$.

$$(1+\alpha)^{k+1} = (1+\alpha)^k(1+\alpha) \geq (1+k\alpha)(1+\alpha) \geq 1 + (k+1)\alpha,$$

причому в першій нерівності використана умова 2, а друга вірна – тому що $k\alpha^2 \geq 0$.

Доведення монотонного зменшення $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n}\cdot n}{(n^2-1)^n\cdot(n+1)} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1},$$

далі використовуємо нерівність Бернуллі, отже

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} \geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1} \geq \left(1+\frac{n}{n^2}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = 1.$$

Таким чином a_n монотонно зменшується, $a_n > 0$, що згідно з зауваженням 4.1 завершує доведення існування границі a_n. В завершення маємо, що границя

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

існує і її прийнято позначати e.

§5 Границя функції.

Визначення 5.1 (Коші). *Число $A \in \mathbb{R}$ називається границею числової функції $f(x)$, в точці x_0, якщо*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Позначається $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ *або* $f(x) \to A, x \to x_0$.

Позначення 5.1. *Якщо $X, Y \subset \mathbb{R}$, то множина $X \setminus Y$ складається з тих елементів X, що не належать Y.*

Визначення 5.2. *Число $A \in \mathbb{R}$ називається границею числової функції $f(x)$, в точці x_0, якщо*

(а) $\forall O_\varepsilon(A) \ \exists O_\delta(x_0) \ \forall x \in O_\delta(x_0) \setminus x_0, \ f(x) \in O_\varepsilon(A)$,

або ще стисліше

(б) $\forall O(A) \ \exists O(x_0) \ \ f(O(x_0) \setminus x_0) \subset O(A)$.

Визначення 5.3 (Гейне). *Число $A \in \mathbb{R}$ називається границею числової функції $f(x)$, в точці x_0, якщо*

$$\forall \{x_n \neq x_0\} \, x_n \to x_0 \quad f(x_n) \to A.$$

Теорема 5.1. *Визначення границі Коші і Гейне еквівалентні.*

Доведення. 1. (Коши) => (Гейне). Маємо:

$$\forall O(A) \ \exists O(x_0) \ \ f(O(x_0) \setminus x_0) \subset O(A),$$

$$\forall O(x_0) \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \ x_n \in O(x_0) \setminus x_0.$$

Необхідно довести: $f(x_n) \to A$, тобто

$$\forall O(A) \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \ f(x_n) \in O(A).$$

Щоб $f(x_n) \in O(A)$ достатньо $x_n \in O(x_0) \setminus x_0$, а це відбувається $\forall n > N$. Що і було необхідно довести.

2. (Гейне) => (Коши). Доведення від протилежного. Відсутність границі по Коші має таке формальне визначення:

(а) $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in O_\delta(x_0) \setminus x_0 \ \ f(x) \notin O_\varepsilon(A)$

і його можливо пояснити наступними міркуваннями.

Якщо вислів з деякою множиною X і умовою $\mathfrak{I}$

$$\forall x \in X \ \text{виконана умова } \mathfrak{I}$$

є невірним, то буде вірним вислів

$$\exists x \in X, \ \textit{для якого умова } \mathfrak{I} \textit{ не виконана,}$$

тобто формально це можна записати:

$$\neg(\forall x \in X \quad \mathfrak{I}) \ \textit{тотожно} \ \exists x \in X \quad \neg\mathfrak{I}.$$

Також,

$$\neg(\exists x \in X \quad \mathfrak{I}) \ \textit{тотожно} \ \forall x \in X \ \neg\mathfrak{I}.$$

Використовуючи ці зауваження, маємо вірні тотожні твердження:

$$\neg\big(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in O_\delta(x_0)\backslash x_0 \ f(x) \in O_\varepsilon(A)\big),$$

$$\exists \varepsilon > 0 \ \neg\big(\exists \delta > 0 \ \forall x \in O_\delta(x_0)\backslash x_0 \ f(x) \in O_\varepsilon(A)\big),$$

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \neg\big(\forall x \in O_\delta(x_0)\backslash x_0 \ f(x) \in O_\varepsilon(A)\big),$$

(a) $$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in O_\delta(x_0)\backslash x_0 \ \neg\big(\ f(x) \in O_\varepsilon(A)\big).$$

Далі беремо $\delta = 1, \ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ і знаходимо для кожного δ_n відповідне x_n із умови (а) $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta_n \ \exists x_n \in O_{\delta_n}(x_0)\backslash x_0 \ f(x_n) \notin O_\varepsilon(A)$.

Ми отримали протиріччя: $x_n \in O_{\frac{1}{n}}(x_0)\backslash x_0$, тобто $x_n \to x_0, x_n \neq x_0$, але $f(x_n) \notin O_\varepsilon(A)$.

Теорема 5.2. *Якщо* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B,$ *то*

(а) $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B;$

(б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ g(x) = A\ B;$

(в) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, *якщо також* $B \neq 0$;

(г) якщо $A < B$, *то в деякому околі* $O_\delta(x_0)\backslash x_0 \ f(x) < g(x)$;

(д) якщо $f(x) \leq g(x)$, *то* $A \leq B$.

Доведення витікає з теорем 3.2-3.5, а також з визначення границі по Гейне.

Зауваження 5.1. *Границя* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ *в термінах границі функції може бути записана як* $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

§6. Неперервні функції.

Визначення 6.1. *Функція* $f(x)$ *називається неперервною, якщо* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

З урахуванням визначення 5.2(б) маємо топологічний варіант визначення (топологія – розділ математики, що вивчає властивості множин, що зберігаються при неперервних відображеннях).

Визначення 6.1. *Функція* $f(x)$ *називається неперервною, якщо*

$$\forall O\big(f(x)\big)\ \exists O(x)\ \ f\big(O(x)\big) \subset O\big(f(x)\big).$$

Визначення 6.2. *Функція* $f(x)$ *називається неперервною на множині, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.*

Теорема 6.1. *Якщо функції* $f(x), g(x)$ *неперервні на множині, то також неперервними на цій множині будуть функції:*

$$f(x)+g(x), \qquad f(x)\,g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)},$$

останнє вірно, якщо $g(x) \neq 0$.

Доведення витікає з теореми 5.2, а також з визначення неперервної функції.

Висновок 6.1. *Многочлени* $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *неперервні на* $\mathbb{R}$.

Раціональні функції

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

неперервні на $\mathbb{R}\backslash\{Q_m(x) = 0\}$.

Доведення витікає з теореми 6.1 і неперервності функції $f(x) = x$. Останнє доводиться із визначення 6.1, яке в нашому випадку має вигляд:

$$\forall O(x)\ \exists O(x)\ \ O(x) \subset O(x)$$

і є очевидним.

Теорема 6.2 (Больцано). *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку, має на його кінцях протилежні за знаком значення, то існує точка відрізка з нульовим значенням функції.*

Доведення. Розділимо відрізок визначення функції навпіл. Якщо в точці розділу функція є нульова, то теорема вірна. Якщо не так, то виберемо ту половину, на якій функція має протилежні за знаком значення і продовжимо це робити далі. Якщо цей процес закінчиться, то теорема вірна. Припустимо це не так. Ми отримаємо нескінченну вкладену систему відрізків $[a_n, b_n]$, довжина яких наближається до нуля. Отже існує єдина точка c, що належить всім відрізкам. За умовою вибору відрізків

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c, \quad f(a_n)\, f(b_n) < 0,$$

отже

$$\lim_{n\to\infty}\big(f(a_n)\, f(b_n)\big) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \big(f(c)\big)^2 \le 0,$$

що можливе лише при умові $f(c) = 0$.

Висновок 6.2. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона приймає всі значення між $f(a)$ і $f(b)$.*

Доведення. Нехай C задовольняє умові $f(a) < C < f(b)$. Тоді функція $f(x) - C$ має на кінцях значення з протилежними знаками. Отже існує точка c, така, що $f(c) - C = 0$.

Теорема 6.3 (Вейерштрасса). *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку, то вона обмежена на ньому і досягає найменшого та найбільшого значень.*

Доведення. Припустимо, що неперервна на відрізку функція $f(x)$ не обмежена на ньому. Розділимо відрізок визначення функції навпіл, виберемо ту половину, на якій функція необмежена і будемо повторювати це нескінченно. Ми отримаємо нескінченну вкладену систему відрізків і єдину спільну їх точку, в любому околі якої функція $f(x)$ не обмежена. Але це неможливо для неперервної функції. Отже функція $f(x)$ обмежена і, згідно с теоремою 4.1 існують $M = \sup f(x)$, $m = \inf f(x)$.

Припустимо, значення M функція не досягає, тоді функція $F(x) =$

$\frac{1}{M-f(x)}$ є неперервною і обмеженою, наприклад константою K, що дає оцінку $f(x) < M - \frac{1}{K}$, тобто M не є $\sup f(x)$. Ми маємо протиріччя, отже теорема доведена для максимуму. Для мінімуму доведення аналогічне.

§7. Диференційовність функції.

Визначення 7.1. *Функція $f(x)$ називається малою порівняно з функцією $g(x)$, якщо $f(x) = \alpha(x)g(x)$, де функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою.*

Позначення. $f(x) = o\big(g(x)\big)$.

Визначення 7.2. *Функція $f(x)$ називається диференційовною в точці x_0, якщо*

(а) $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0),\ x \to x_0$.

Число A називається похідною функції $f(x)$ в точці x_0 і позначається $f'(x_0)$ або $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Для запису, там де це зручно, можливе також більш стисле позначення:

(б) $f(x+h) = f(x) + Ah + \alpha h,\ \alpha \to 0, h \to 0$.

Твердження 7.1. *Похідна дорівнює* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Доведення. Наприклад в поданні (б) перенести $f(x)$ в ліву частину рівняння, поділити результат на h і перейти до границі.

Твердження 7.2. *Якщо існує* $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = A$, *то функція $f(x)$ є диференційованою.*

Доведення. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = A + \alpha$, *де α – нескінченно мала, а далі знаходимо $f(x+h)$.*

Визначення 7.3. *Якщо функція $f(x)$ має похідну на всій області визначення, то значення $f'(x)$ утворюють функцію, яка називається похідною функцією функції $f(x)$.*

Теорема 7.1 (арифметичні властивості похідної). *Якщо функції $f(x), g(x)$ мають похідні $f'(x), g'(x)$, то* *(а)* $(f+g)' = f' + g'$;

(б) $(fg)' = f'g + fg'$;

(в) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Доведення. (а) $f(x+h) = f(x) + \ f'(x)h + \alpha h,\ \alpha \to 0,$

$$g(x+h) = g(x) + \ g'(x)h + \beta h, \qquad \beta \to 0.$$

Додаючи ці рівності, отримаємо

$$f(x+h) + g(x+h) = f(x) + g(x) + \big(f'(x) + g'(x)\big)\ h + (\alpha+\beta)h,$$
$$\alpha + \beta \to 0,$$

що і було необхідно.

(б) Аналогічно, $f(x+h)g(x+h) =$

$$= (f(x) + \ f'(x)h + \alpha h)(g(x) + \ g'(x)h + \beta h) =$$

$$= f(x)g(x) + \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)h +$$

$$+(f'(x)g'(x)h + (f(x) + \ f'(x)h + \alpha h)\beta + \alpha(g(x) + \ g'(x)h + \beta h) + \alpha\beta h)h$$

і отримуємо необхідне подання.

(в) Аналогічно, але дещо складніше, $\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} =$

$$= \frac{f(x) + \ f'(x)h + \alpha h}{g(x) + \ g'(x)h + \beta h} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(f'(x)h + \alpha h)g(x) - f(x)(g'(x)h + \beta h)}{g(x+h)g(x)}.$$

Окремо обчислимо $\frac{1}{g(x+h)}$.

$$\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} = -\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h)g(x)} = \frac{(g'(x) + \beta)h}{g(x+h)g(x)},$$

отже $\frac{1}{g(x+h)} = \frac{1}{g(x)} + \gamma$, де γ – є нескінченно мала.

Підсумовуючи, маємо $\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} =$

$$= \left(\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)}h + \frac{\alpha g(x) - f(x)\beta}{g(x)}h\right)\left(\frac{1}{g(x)} + \gamma\right) =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}h + \left(\frac{\alpha g(x) - f(x)\beta}{g(x)^2}\right)(1 + g(x)\gamma)h,$$

що завершує доведення.

Теорема 7.2 (похідна складної функції). *Якщо функція* $f(x)$ *диференційовна в точці* x, *а функція* $g(y)$ *– в точці* $y = f(x)$, *то композиція цих функцій також є диференційовною, причому*

$$\left(g\big(f(x)\big)\right)' = g'\big(f(x)\big)f'(x).$$

Доведення. $f(x+h) = f(x) + \ f'(x)h + \alpha h,\ \alpha \to 0,$

$$g(y+s) = g(y) + \ g'(y)s + \beta s, \qquad \beta \to 0.$$

Вважаємо, що $y = f(x), y + s = f(x+h)$.

$$g\big(\ f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big) = g'\big(f(x)\big)s + \beta s =$$

$$= g'\big(f(x)\big)\big(f(x+h) - f(x)\big) + \beta\big(f(x+h) - f(x)\big) =$$

$$= g'\big(f(x)\big)(f'(x)h + \alpha h) + \beta(f'(x)h + \alpha h) =$$

$$= g'\big(f(x)\big)f'(x)h + \Big(\alpha g'\big(f(x)\big) + \beta(f'(x) + \alpha)\Big)\,h.$$

Визначення 7.4. *Функції* $y = f(x), x = g(y)$ *називаються взаємно оберненими, якщо їх суперпозиції є тотожними функціями:*

$$g\big(f(x)\big) = x, f\big(g(y)\big) = y.$$

Приклад 7.1. $\sqrt{x^2} = x,\ \left(\sqrt{y}\right)^2 = y,\ x \geq 0,$

$$arcsin\big(sin(x)\big) = x, \qquad sin\big(arcsin(y)\big) = y, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$arccos\big(cos(x)\big) = x, \qquad cos\big(arccos(y)\big) = y, \qquad x \in [0, \pi],$$

$$ln(e^x) = x, \qquad e^{ln(y)} = y, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема 7.3 (похідна оберненої функції). *Якщо взаємно обернені функції* $y = f(x), x = g(y)$ *диференційовні в точках* x *і* y *відповідно, їх похідні пов'язані співвідношенням:*

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}.$$

Доведення. Із неперервності функцій маємо якщо $x \to x_0$, то $y \to y_0$ і навпаки. Отже

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{g(y) - g(y_0)} = \frac{1}{g'(y)}.$$

Приклад 7.2.

$$y = x^2, x = \sqrt{y}, \qquad \left(\sqrt{y}\right)' = \frac{1}{(x^2)'} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$y = sin(x), x = arcsin(y), \left(arcsin(y)\right)' = \frac{1}{\left(sin(x)\right)'} = \frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$y = tg(x), x = arctg(y), \left(arctg(y)\right)' = \frac{1}{\left(tg(x)\right)'} = \left(cos(x)\right)^2 = \frac{1}{1+y^2}$$

Теорема 7.4 (Ферма). *Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці максимуму (мінімуму), то її похідна в цій точці дорівнює 0.*

Доведення. Нехай x є точка максимуму функції $f(x)$, тоді

$$f(x+h) - f(x) = (f'(x) + \alpha)h < 0.$$

Для малого значення h вираз $f'(x) + \alpha$ має певний знак, отже вираз $(f'(x) + \alpha)h$ змінює знак при змінюванні знаку h, а не є завжди негативним. Аналогічне протиріччя має місто, якщо x є точка мінімуму функції $f(x)$.

Теорема 7.5 (Ролля). *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційовна на інтервалі (a, b), а також $f(a) = f(b)$, то існує точка, в якій її похідна дорівнює 0.*

Доведення. Неперервна функція приймає максимальне і мінімальне значення x_{max}, x_{min}. Якщо ці точки лежать на кінцях відрізка $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, то функція є константою і тоді $f'(x) \equiv 0$.

В противному випадку одна з цих точок лежить в інтервалі (a, b), а згідно теоремою 7.4 (Ферма) вірне $f'(x_{max}) = 0$ або $f'(x_{min}) = 0$.

Теорема 7.6 (Лагранжа). *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційовна на інтервалі (a, b), то існує точка $c \in (a, b)$, в якій*

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a).$$

Доведення. Введемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a).$$

Ця функція відповідає умовам теореми 7.5 (Ролля), $F(a) = F(b) = f(a)$, отже існує точка $c \in (a,b)$, в якій $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

Теорема 7.7 (Коші). *Якщо функції $f(x), g(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$ і диференційовні на інтервалі (a,b), а також $g'(x) \neq 0$, то існує точка $c \in (a,b)$, в якій*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доведення. Введемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right).$$

Ця функція задана коректно, тому що $g(b) \neq g(a)$, як це витікає з теореми 7.5 (Ролля), і відповідає умовам теореми 7.5 (Ролля), $F(a) = F(b) = f(a)$, отже існує точка $c \in (a,b)$, в якій

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

§8. Правило Лопіталя.

Теорема 8.1 (Правило Лопіталя). *Нехай функції $f(x), g(x)$ диференційовні на інтервалі $(a,b) \subset ([-\infty,+\infty])$, а також $g'(x) \neq 0$ і*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A,\ \ x \to a+0\ (A \in [-\infty,+\infty]).$$

Тоді, якщо

(a) $f(x) \to 0, g(x) \to 0, \quad x \to a+0$ *або*

(б) $f(x) \to \infty, g(x) \to \infty, \quad x \to a+0.$

Аналогічне вірно для $x \to b-0$.

Доведення. Згідно з теоремою Коші $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

(а) Нехай $y \to a+0$, тоді згідно умови

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} + \varepsilon,\ \ \varepsilon \to 0.$$

Тепер те ж зробимо для x: $x \to a + 0$. Оскільки $a < c < x$, то і $c \to a + 0$. Із умови теореми маємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = A + \varepsilon + \epsilon,\ \ \epsilon \to 0,$$

що і означає

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A,\ \ x \to a + 0.$$

(б) Нехай $x \to a + 0$, тоді

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(x)}{g(x) - g(y)} + \varepsilon,\ \ \varepsilon \to 0,$$

а також

$$\frac{f(x)}{g(x) - g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)g(y)}{\big(g(x) - g(y)\big)g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}\epsilon,\ \ \epsilon \to 0$$

і формула $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ матиме вигляд:

$$\frac{f(x)}{g(x)}(1 + \epsilon) + \varepsilon = \frac{f'(c)}{g'(c)},\ \ x \to a + 0.$$

Тепер, якщо і $y \to a + 0$, то також $c \to a + 0$, $\frac{f'(c)}{g'(c)} \to A$, і $\frac{f(x)}{g(x)} \to A$.

§ 9. Первісна.

Визначення 9.1. *Функція $F(x)$ називається первісною до функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$.*

Позначення: $F(x) = \int f(x)\,dx$.

Теорема 9.1. *Якщо функції $F_1(x), F_2(x)$ – первісні до функції $f(x)$, то їх різниця $F_1(x) - F_2(x)$ є постійна функція.*

Доведення. Згідно з теоремою 7.6 (Лагранжа), застосованої до функції

$F_1(x) - F_2(x)$ у точках $x, x_0 \in [a,b]$, маємо для змінної x і фіксованої x_0 необхідний результат:

$$\left(F_1(x) - F_2(x)\right) - \left(F_1(x_0) - F_2(x_0)\right) = \left(F'_1(c) - F'_2(c)\right)(x - x_0) = 0,$$

оскільки згідно з умовою $F'_1 \equiv F'_2$.

Теорема 9.2. *Для первісних справедливі співвідношення:*

(а) лінійність:

$$\int \left(\alpha\, u(x) + \beta\, v(x)\right) dx = \alpha \int u(x)\, dx + \beta \int v(x)\, dx;$$

(б) інтегрування по частинах:

$$\int u'(x) v(x) dx = u(x) v(x) - \int u(x) v'(x) dx;$$

(в) заміна змінної:

Якщо $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, *то* $\int f\left(\varphi(t)\right) \varphi'(t) dt = F\left(\varphi(t)\right) + C$.

Доведення. Згідно з теоремою 9.1, достатньо довести рівність похідних усіх співвідношень, що дає вже відомі співвідношення для похідних.

Зауваження 9.1. *Для обчислення інтегралів зручно використовувати формулу Лейбниця*

$$df(x) = f'(x)\, dx,$$

яка дозволяє значно спростити обчислення інтегралів, оскільки вона значно скорочує формули теореми 9.2.

Неформальний її сенс полягає у тому, що похідна $f'(x)$ *є відношенням «нескінченно малого» приросту функції до «нескінченно малого» приросту аргументу.*

З використанням формули Лейбниця теорема 9.1 має вигляд:

(б) інтегрування по частинах:

$$\int v du = uv - \int u dv;$$

(в) заміна змінної:

Якщо $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, *то* $\int f(\varphi)\, d\varphi = F(\varphi) + C$,

тобто має вигляд очевидної тотожності.

§10. Визначений інтеграл Рімана.

Визначення 10.1. *Якщо функція $f(\,x)$ визначена на відрізку $[a,b]$, на якому зроблене розбиття на відрізки: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ з відміченими точками: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то сума*

$$S_{fx\xi} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

називається інтегральною сумою для функції $f(\,x)$, що відповідає розбиттю $\{x_i\}$ з відміченими точками $\{\xi_i\}$.

Якщо розглядаються різні відрізки, то інтегральну суму позначаємо $S_{fx\xi[a,b]}$.

Визначення 10.2. *Число $\mathfrak{I}$ називається визначеним інтегралом Рімана від функції $f(\,x)$ на відрізку $[a,b]$, якщо*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\{x_i\}\ (x_i - x_{i-1}) < \delta\quad \left|\mathfrak{I} - S_{fx\xi}\right| < \varepsilon,$$

Позначення: $\mathfrak{I} = \int_a^b f(x)\,dx$.

Теорема 10.1 (необхідна умова інтегровності). *Якщо функція $f(\,x)$ є інтегровною на відрізку $[a,b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.*

Доведення. Нехай $\{x_i\}$ – довільне розбиття відрізку $[a,b]$, $[x_{i-1}, x_i]$ – відрізок, на якому функція нескінченна. Тоді ξ_i можливо вибрати так, що величина $f(\xi_i)$ буде більше любого наперед заданого числа і те ж буде вірно для всієї інтегральної суми $S_{fx\xi}$. Отже нерівність $\left|\mathfrak{I} - S_{fx\xi}\right| < \varepsilon$ для любого наперед заданого ε неможлива.

Теорема 10.2 (критерій інтегровності). *Функція $f(\,x)$ є інтегровною на відрізку $[a,b]$ якщо і тільки якщо*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\{x_i\}\ (x_i - x_{i-1}) < \delta\quad \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon,$$

де $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(\,x)$, $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(\,x)$.

Лема 10.2. *Існує число $\mathfrak{I}_f$, що для довільних способів розбиття*

$\{x_i\}$, $\{x_i'\}$ *відрізку* $[a, b]$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \mathcal{J}_f \le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Доведення. Розглянемо розбиття $\{x_i''\}$, що утворюється точками $\{x_i\}$, $\{x_i'\}$. Для нього є вірними нерівності:

$$\sum m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum m_i(x_i'' - x_{i-1}'') \le \sum M_i(x_i'' - x_{i-1}'') \le \sum M_i(x_i' - x_{i-1}'),$$

оскільки при додаванні точок до розбиття сума $\sum m_i(x_i - x_{i-1})$ може тільки зростати, а сума $\sum M_i(x_i' - x_{i-1}')$ – тільки зменшуватися.

Використовуючи аксіому неперервності до множин значень $\sum m_i(x_i - x_{i-1})$ і $\sum M_i(x_i' - x_{i-1}')$, отримаєм існування $\mathcal{J}_f$.

Доведення. Достатність. Ми маємо нерівність

$$\sum m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum M_i(x_i - x_{i-1}),$$

а також згідно з лемою 10.2.1

$$\sum m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum \mathcal{J}_f(x_i - x_{i-1}) \le \sum M_i(x_i - x_{i-1}),$$

отже

$$\left|\mathcal{J}_f - S_{fx\xi}\right| \le \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Доведення. Необхідність. Функція $f(\,x)$ є інтегровною, отже

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \forall\{x_i\}\; (x_i - x_{i-1}) < \delta$$

$$\mathcal{J} - \varepsilon \le \sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \mathcal{J} + \varepsilon.$$

Згідно з визначенням sup і inf $\forall\varepsilon > 0$ маємо нерівності

$$f(\xi_i) > M_i - \varepsilon, \;\; f(\xi_i') < m_i + \varepsilon,$$

які після множення їх на $(x_i - x_{i-1})$ і підсумування дають

$$\sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) > \sum M_i(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon(b-a),$$

$$\sum f(\xi_i')(x_i - x_{i-1}) < \sum m_i(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(b-a).$$

Різниця між цими нерівностями дає остаточну нерівність, яка завершує доведення:

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \left|S_{fx\xi} - S'_{fx\xi}\right| + 2\varepsilon(b-a) < 2\varepsilon + 2\varepsilon(b-a).$$

Визначення 10.1. *Функція $f(\,x)$ називається рівномірно неперервною, якщо*

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \ \ |x_1 - x_2| < \delta \ \ \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Для порівняння нагадуємо

Визначення 10.2. *Функція $f(\,x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо*

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ \forall x \ \ |x - x_0| < \delta \ \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Зауваження 10.1. *Визначення 10.1 і 10.2 відрізняються тільки тим, що в визначеності неперервності точка x_0 є фіксованою. Отже з рівномірної неперервності витікає неперервність, але не навпаки.*

Теорема 10.3. *Неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(\,x)$ є інтегровною.*

Лема 10.2. *Неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(\,x)$ є рівномірно неперервною.*

Доведення від протилежного. *Нехай функція $f(\,x)$ є неперервною, але не рівномірно неперервною. Тоді (див. також доведення теореми 5.1. (Гейне)⟹(Коші))*

$$\exists\varepsilon > 0 \ \forall\delta > 0 \ \exists x_1, x_2 \ \ |x_1 - x_2| < \delta \ \ \ |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon.$$

Розділимо відрізок $[a, b]$ навпіл і виберемо ту половину, в якій ця умова не виконується, і далі нескінченно продовжуємо цей процес. Ми отримаємо спільну для всіх відрізків точку c. З умови неперервності функції $f(\,x)$

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ \forall x \ \ |x - c| < \delta \ \ \ |f(x) - f(c)| < \varepsilon,$$

неможливо разом з умовою

$$\exists \varepsilon > 0\ \ \forall \delta > 0\ \ \exists x_1, x_2\ \ |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon.$$

Отже лема доведена, тобто з умови теореми витікає, що функція $f(\,x)$ рівномірно неперервна.

Для довільного ε візьмемо таке розбиття відрізка $[a, b]$, щоб якщо $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a)$$

і згідно критерію теореми 10.2 неперервна функція є інтегровною.

Висновок 10.1. *Функція, що має на відрізку $[a, b]$ скінченну кількість точок розриву, є інтегровною.*

Доведення. *Достатньо довести твердження для однієї точки розриву. Нехай точка розриву є $c \in [x_{k-1}, x_k]$. Сума з критерію має вигляд:*

$$\sum_{i=1, i\neq k}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Перша сума мала, оскільки вона отримана на множині, на якій функція неперервна, а друга мала, оскільки різниця $M_k - m_k$ обмежена, а $x_k - x_{k-1}$ може бути взята як завгодно малою.

Теорема 10.3. *Монотонна на відрізку $[a, b]$ функція $f(\,x)$ є інтегровною.*

Доведення. *Нехай $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, тоді*

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \delta \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i) = \delta |f(b) - f(a)|,$$

тобто може бути як завгодно малою.

§11. Властивості визначеного інтегралу.

Теорема 11.1 (лінійність). *Якщо функції $f(x), g(x)$ інтегровні на відрізку $[a, b]$, то функція $\alpha f(x) + \beta\ g(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, також інтегровна і*

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta\, g(x)\big)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

Доведення. *Для довільного розбиття*

$$\alpha S_{fx\xi} + \beta S_{gx\xi} = S_{(\alpha f+\beta\, g)x\xi},$$

і необхідно перейти до границі.

Теорема 11.2 (адитивність). *Якщо функція* $f(x)$ *інтегровна на відрізку* $[a,b] \ni c$, *то вона також інтегровна на відрізках* $[a,c],[c,b]$ *і при цьому*

$$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Доведення. *Сума* $\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$ може буди яв завгодно малою на відрізку $[a,b]$, це тим більш вірно для відрізків $[a,c],[c,b]$, отже функція інтегровна на них також, а значить, при розбитті без обмеження загальності можливо завжди вибирати точку c. Маємо

$$S_{fx\xi[a,c]} + S_{fx\xi[c,b]} = S_{fx\xi[a,b]}$$

і переходимо до границі.

Теорема 11.3 (монотонність). *Якщо функції* $f(x), g(x)$ *інтегровні на відрізку* $[a,b]$ *і* $f(x) \le g(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx.$$

Доведення *витікає з очевидної нерівності* $S_{fx\xi} \le S_{gx\xi}$.

Висновок 11.1. *Якщо функція* $f(x)$ *інтегровна на відрізку* $[a,b]$ *і* $m \le f(x) \le M$, *то*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\, dx \le M(b-a).$$

Висновок 11.2. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$, *то існує точка* $c \in [a,b]$, *для якої* $\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a)$.

Доведення. *З висновку 11.1 маємо*

$$inf f(x) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \sup f(x),$$

а оскільки неперервна функція приймає всі значення між $inf f(x)$ і $\sup f(x)$, то ми отримуємо необхідну формулу.

Теорема 11.4. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна, а* $g(x) > 0$ – *інтегровна на відрізку* $[a, b]$, *то існує точка* $c \in [a, b]$, *для якої*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Доведення. Позначимо $m = inf f(x), M = \sup f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$$

і із критерія (теорема 10.2) разом з рівномірною неперервністю $f(x)$ маємо інтегровність $f(x)g(x)$. Із теореми 1.3

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx \implies$$

$$m \le \frac{1}{\int_a^b g(x)\,dx}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M,$$

і із неперервності $f(x)$ отримуємо необхідне.

Теорема 11.5. (формула Ньютона-Лейбниця). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a, b], F(x)$ – *первісна для функції* $f(x)$, *то*

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x),$$

зокрема

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Доведення. Запишемо умову диференційовності функції $\int_a^x f(t)\,dt$.

$$\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = f(x)h + \alpha h,$$

де α нескінченно мала. Із властивостей визначеного інтегралу витікає, що

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x)h + \alpha h \iff \int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,dt = \alpha h,$$

і це вірне, оскільки функція $f(x)$ неперервна і $f(t) - f(x)$ є нескінченно малою, якщо $h \to 0$.

Всі первісні відрізняються константою (теорема 9.1), отже

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C.$$

Підставляючи $x = a$, маємо $C = -F(a)$ і наостанок підставляємо $x = b$.

§12. Формула Тейлора.

Теорема 12.1. *Якщо функція $f(t)$ на відрізку $[a, b]$ має неперервні похідні до порядку $n + 1$ включно, то справедлива формула Тейлора*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f'(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + r_n,$$

де згідно з поданням Коші

$$r_n = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x - t)^n\,dt.$$

Доведення. Застосуємо формулу інтегрування по частинах.

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt = -\int_a^x f'(t)\,d(x - t) = -f'(t)(x - t)|_a^x +$$

$$\int_a^x f''(t)\,(x - t)dt = f'(a)(x - a) - \frac{1}{2!}\int_a^x f''(t)\,d(x - t)^2 =$$

$$f'(a)(x - a) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2|_a^x - \frac{1}{3!}\int_a^x f'''(t)\,d(x - t)^3 =$$

$$f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 - \frac{1}{4!}\int_a^x f^{(4)}(t)\,d(x - t)^4 =$$

$$f'(a)(x-a)+..+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n-\frac{1}{(n+1)!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,d(x-t)^{n+1}.$$

Висновок 12.1 (Лагранж). *В умовах теореми 12.1 існує точка* c*, для якої*

$$r_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Доведення. *Згідно з теоремою11.4*

$$\frac{1}{(n+1)!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,d(x-t)^{n+1}dt=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n dt=$$

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Висновок 12.2 (Пеано). *В умовах теореми 12.1*

$$r_n=o((x-a)^n).$$

§13. Степеневі ряди.

Теорема 13.1. *Із обмеженої послідовності* $\{a_n\}$ *завжди можна вибрати підпослідовність* $\{a_{n_k}\}$*, що збігається.*

Доведення. Розділимо відрізок, що містить у собі послідовність навпіл і виберемо ту половину, в якій знаходиться нескінченна множина членів послідовностей і візьмемо в ній перший елемент підпослідовності a_{n_1}. Далі знову розділимо отриманий відрізок, виберемо знову половину з нескінченою множиною членів послідовності і візьмемо в ній елемент a_{n_2} такий, щоб $n_1 < n_2$. Нескінченно продовжим процес. Єдина спільна точка всіх вибраних відрізків буде границею послідовності $\{a_{n_k}\}$.

Теорема 13.2 (критерій Коші для послідовності). *Послідовність збігається якщо і тільки якщо*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n,m>N\ \ |a_n-a_m|<\ \varepsilon.$$

Доведення (необхідність). Якщо послідовність має границю, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Беремо також довільне $m > N$ і маємо

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m > N\ |a_m - A| < \varepsilon,$$

а разом

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N\ |a_n - a_m| \le |a_n - A| + |a_m - A| < 2\,\varepsilon.$$

Доведення (достатність). Із умови

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m >. N\ |a_n - a_m| < \varepsilon,$$

фіксуючи a_m, доводимо обмеженість послідовності, отже з неї можна вибрати підпослідовність $\{a_{n_k}\}$, що має границю A, тобто

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n_k > N\ |a_{n_k} - A| < \varepsilon.$$

Ця умова разом з

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n_k, m > N\ |a_{n_k} - a_m| < \varepsilon$$

дають

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m > N\ |a_m - A| \le |a_{n_k} - a_m| + |a_{n_k} - A| < 2\,\varepsilon.$$

Визначення 13.1. *Сума*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

називається рядом. Сумою S ряду будемо називати границю часткових сум

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k,}\quad S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Висновок 13.1 (критерій Коші для ряду). *Ряд збігається якщо і тільки якщо*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N, \forall\, p \in \mathbb{N}\ \sum_{k=n}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

Визначення 13.2. *Ряд*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

називається степеневим.

Приклад 13.1. *Сума нескінченої геометричної прогресії.*

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n,$$

$$xS_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n+1},$$

$$S_n - xS_n = 1 - x^{n+1} \implies S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \implies S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-x}.$$

Теорема 13.3 (мажорантна ознака збіжності ряду). *Нехай члени рядів* a_n , b_n *такі, що* $|a_n| \le b_n$, $b_n > 0$. *Тоді із збіжності ряду* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *витікає збіжність ряду* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Доведення є наслідком критерія Коші і нерівності

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| \le \sum_{k=n}^{n+p} |a_k| \le \sum_{k=n}^{n+p} b_k\,.$$

Теорема 13.4 (ознака Коші збіжності ряду). *Нехай існує границя* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R^{-1}$, *тоді ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *збігається, якщо* $|x| < R$, *і розбігається, якщо* $|x| > R$.

Доведення. *Нехай* $|x| < R' < R$ і згідно з умовою $\sqrt[n]{a_n} < R^{-1} + \varepsilon = \frac{1+\varepsilon R}{R}$ для любого позитивного ε. Виходячи з цього, маємо

$$|a_n x^n| < (1+\varepsilon R)^n \left(\frac{R'}{R}\right)^n = \alpha^n, \qquad \alpha = (1+\varepsilon R)\frac{R'}{R}.$$

Оскільки ε ми можемо вибрати як завгодно малим, то можна вважати, що $0 < \alpha < 1$, отже, починаючи з деякого номеру, α^n стає мажорантою ряду $a_n x^n$ (приклад 13.1), який, таким чином, збігається.

Аналогічно доводиться розбіжність при $|x| > R' > R$.

$$\sqrt[n]{a_n} > R^{-1} - \varepsilon = \frac{1 - \varepsilon R}{R},$$

$$|a_n x^n| > (1-\varepsilon R)^n \left(\frac{R'}{R}\right)^n = \beta^n, \qquad \beta = (1-\varepsilon R)\frac{R'}{R} > 1.$$

Теорема 13.5 (ознака Д'аламбера збіжності ряду). *Нехай існує границя* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$, *тоді ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *збігається, якщо* $|x| < R$, *і розбігається, якщо* $|x| > R$.

Доведення. *Нехай* $|x| < R' < R$ і згідно з умовою і, починаючи з деякого номера,

$$\frac{|a_{N+k-1}|}{|a_{N+k}|} > R - \varepsilon \implies |a_{N+k}| < \frac{|a_{N+k+1}|}{R-\varepsilon} \implies$$

$$|a_{N+k}| < \frac{|a_{N+k-1}|}{R-\varepsilon} < \frac{|a_{N+k-2}|}{(R-\varepsilon)^2} < \cdots < \frac{|a_N|}{(R-\varepsilon)^k} \implies$$

$$|a_{N+k}||x|^{N+k} < |a_N|(R')^N \left(\frac{R'}{R-\varepsilon}\right)^k.$$

Можна вважати, що $\frac{R'}{R-\varepsilon} < 1$, а це означає, що ми маємо мажоранту, яка збігається.

Доведення другої частини теореми аналогічне.

Визначення 18.1.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots,$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots,$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Теорема 13.6. *Степеневі ряди функцій* $e^x, sin(x), cos(x)$ *збігаються для довільного аргументу, функцій* $ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ *– для* $|x| < 1$.

Доведення. Необхідно застосувати ознаку Д'аламбера.

Теорема 13.7. *Для елементарних функцій справедливі співвідношення:*

(а) e^x:

$$(e^x)' = e^x, \qquad e^{x+y} = e^x\, e^y.$$

(б) $sin(x), cos(x)$:

$$\big(sin(x)\big)' = cos(x), \big(cos(x)\big)' = -sin(x), \big(sin(x)\big)^2 + \big(cos(x)\big)^2 = 1,$$

$$sin(x+y) = sin(x)cos(y) + sin(y)cos(x),$$

$$cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y).$$

(в) $ln(x)$:

$$\big(ln(x)\big)' = \frac{1}{x}, \qquad ln(e^x) = x.$$

(г) $(1+x)^\alpha$:

$$(\,(1+x)^\alpha)' = \alpha\,(1+x)^{\alpha-1}.$$

Доведення. Формули диференціювання доводяться для часткових сум і переходом до границі. У випадку логарифму при диференціюванні отримується геометрична прогресія.

Знайдемо похідну по x:

$$\left(\frac{e^{x+y}}{e^x}\right)' \equiv 0 \;\Rightarrow\; \frac{e^{x+y}}{e^x} \equiv const$$

і визначимо константу підставляючи $x = 0$.

$$\left(\big(cos(x)\big)^2 + \big(sin(x)\big)^2\right)' \equiv 0,$$

отже $\big(cos(x)\big)^2 + \big(sin(x)\big)^2 = const$, але $cos(0) = 1, sin(0) = 0$.

$$\big(sin(x)cos(a-x) + sin(a-x)cos(x)\big)' \equiv 0,$$

при $x = 0$ маємо: $sin(x)cos(a-x) + sin(a-x)cos(x) = sin(a)$ і заміняємо $a - x$ на y. Похідна по x отриманої тотожності дає останню формулу.

Доведемо, що $y = e^x$ і , $ln(y) = x$ є взаємно обернені функції.

$$\left(\frac{e^{ln(x)}}{x}\right)' \equiv 0 \;\Rightarrow \frac{e^{ln(x)}}{x} \equiv const$$

і визначимо константу підставляючи $x = 1$.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Вивчення курсу вищої математики обов'язково потребує крім розбору теоретичної частини також і оволодіння вмінням розв'язання практичних задач. Деякі з них є досить стандартними, але є і такі, що потребують творчого мислення. Але навіть стандартні задачі можуть мати не єдиний спосіб їх розв'язання.

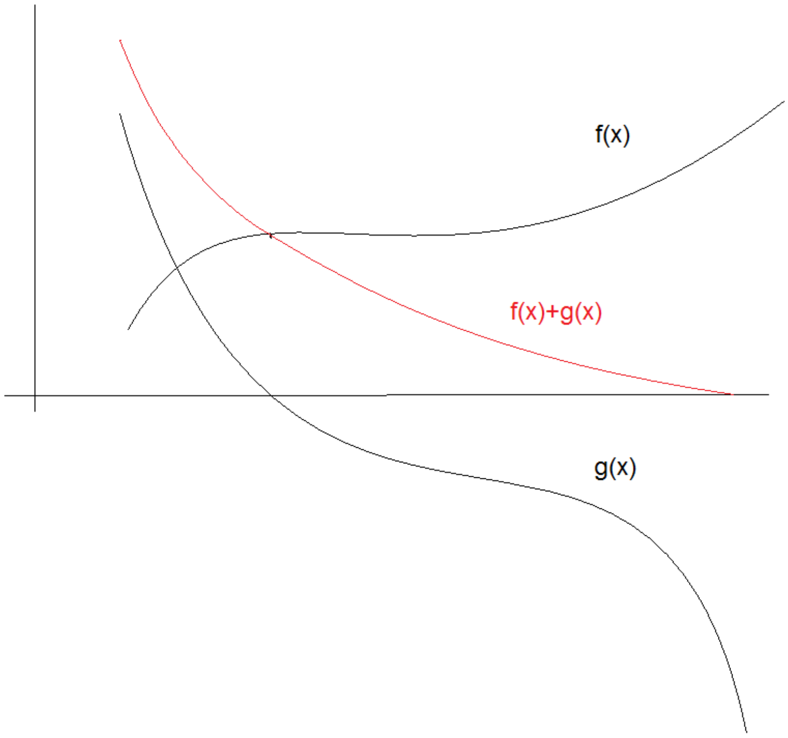
Ціль даного розділу дати допомогу в цій важливій частині засвоєння курсу. Виходячи з такої мети, розділ не є набором практичних занять, але набором тем з прикладами і порадами.

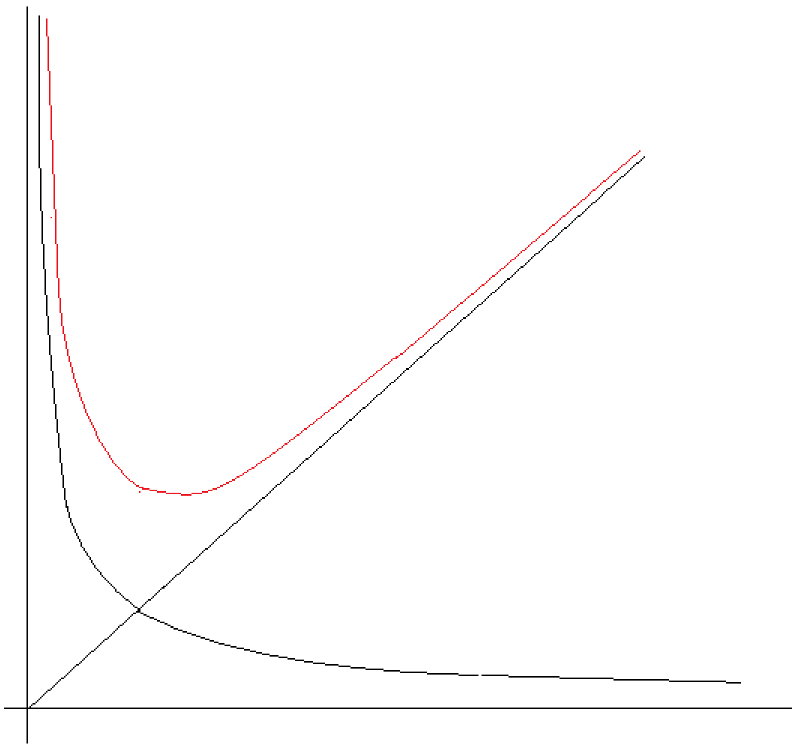
На відміну від теоретичної частини в викладанні практичних задач ми не намагаємся обов'язково розглядати методи розв'язання задач відповідно до викладеного матеріалу лекцій. Вважаємо, що маємо свободу використовувати, наприклад, формули Тейлора для розв'язання задач на знаходження границь, хоч існує традиція використовувати досить багато прийомів з тим, щоб обійтися лише основними класичними границями, що відповідає лише одному або двом членам ряду Тейлора. Також не бачимо проблеми використовувати правило Лопіталя до теми похідної.

Такий підхід дає більше можливостей для вибору найбільш ефективного методу розв'язання задач, тим більше, що намагання активно використовувати на початку курсу шкільні знання не є досить добре. Не має секрету в тому, що шкільні знання основуються не на вмінні довести відомі математичні факти, а виключно на авторитеті шкільного вчителя. Безумовно, що ці знання можливо використовувати, але необхідно при цьому нагадувати, що всі ці знання не підкріплені доведеннями або аксіомами. А найкраще ці не доведені факти доводити заново. Найбільше це відноситься до фактів геометрії, які дуже корисно передоводити методами аналітичної геометрії, мотивуючи це тим, що система аксіом Евкліда є само по собі неповною, так ще й неповно викладеною в шкільному курсі.

Нумерацію визначень, теорем тощо курсу лекцій ми зберігаємо.

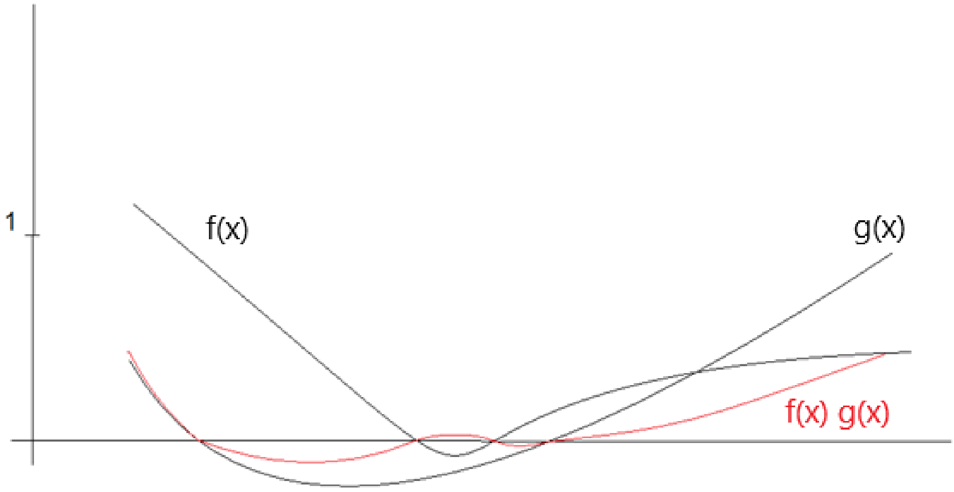
Додавання графіків.

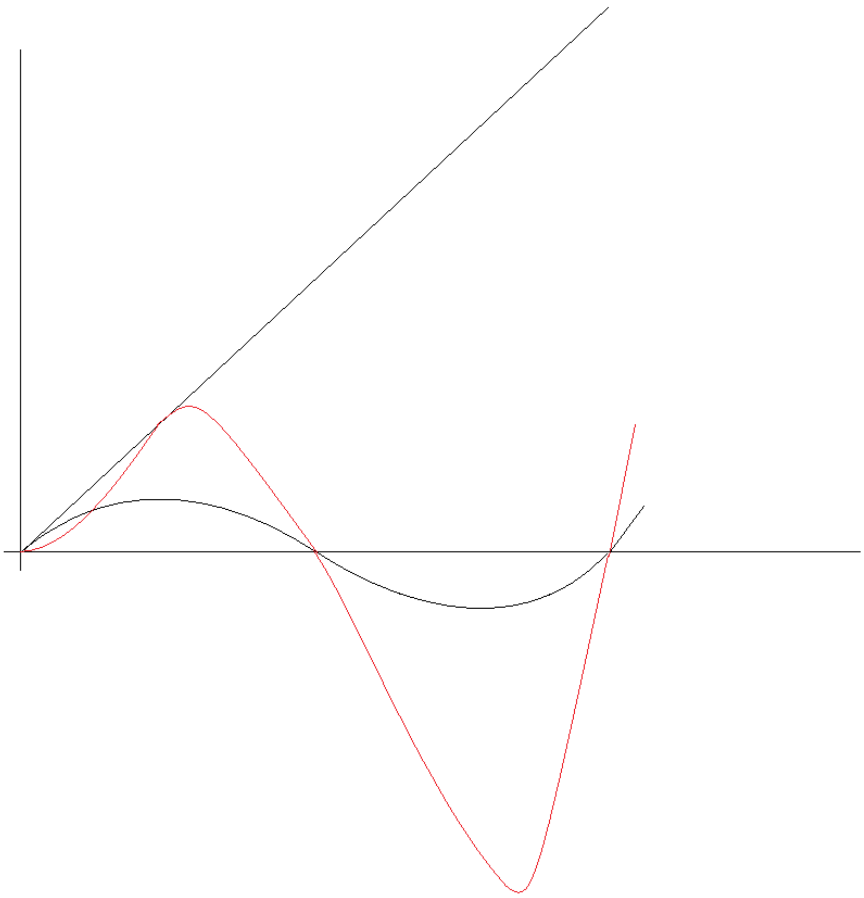




$$y = x + \frac{1}{x}$$

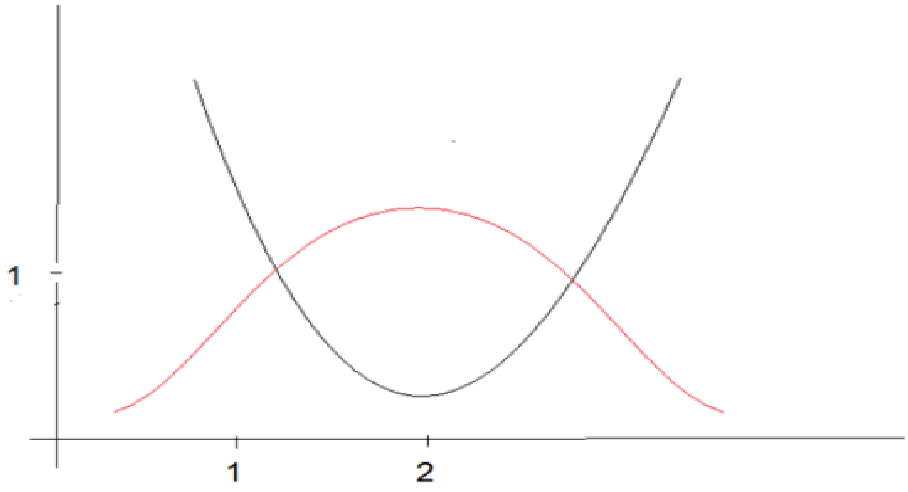
Множення графіків





$$y = x\sin x$$

Ділення графіків.



$$y=(x-2)^2+\frac{1}{3}$$

$$y=\frac{1}{(x-2)^2+\frac{1}{3}}$$

§1. Границя послідовності і функції.

Очевидно, що починати знаходження границь треба з використання визначення границі, а вже потім використовувати теореми про властивості границь та функцій.

Знаходження границі по визначенню.

Визначення 3.3. *Число $A\in\mathbb{R}$ називається границею послідовності a_n, якщо*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ |a_n-A|<\varepsilon.$$

Приклад 1.1. *Знайти границю* $a_n=1$.

Вважаємо, $A=1$. Тоді $|a_n-A|=|1-1|=0<\varepsilon$. Нерівність з визначення вірна завжди, отже $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$.

Приклад 1.2. *Знайти границю* $a_n=\frac{1}{n}$.

Вважаємо, $A=0$. Тоді

$$|a_n-A|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Отже, починаючи с номера більшого, ніж $\frac{1}{\varepsilon}$, необхідна нерівність виконується.

Приклад 1.3. *Знайти границю* $a_n = (-1)^n$.

Доведемо відсутність границі. Оскільки після довільного N послідовність містить значення 1 та -1 необхідно, щоб вони належали околу як завгодно малого розміру. Але це неможливо.

Приклад 1.4. *Знайти границю* $\lim\limits_{n\to\infty} sin(n)$.

Доведемо що границі не існує за допомогою критерія Коші.

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n > N \ |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Візьмемо $m = k - 1, n = k + 1$. Нерівність має вигляд:

$$|sin(m) - sin(n)| = 2|cos(k)sin(1)| < \varepsilon.$$

Отже для існування $\lim\limits_{n\to\infty} sin(n)$ необхідно, щоб $\lim\limits_{n\to\infty} cos(n) = 0$.

Знову застосуємо критерій Коші для таких же m, n.

$$|cos(m) - cos(n)| = 2|sin(k)sin(1)| < \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} sin(n) = 0$. Ми маємо очевидне протиріччя.

Визначення 5.1 (Коші). *Число* $A \in \mathbb{R}$ *називається границею числової функції* $f(x)$, *в точці* x_0, *якщо*

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ \forall x \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Приклад 1.5. *Знайти границю* $\lim\limits_{x\to x_0} x$.

Вважаємо, $A = x_0$. Тоді необхідно щоб $|x - x_0| < \varepsilon$ при умові $0 < |x - x_0| < \delta$, де δ ми обираємо самі. Візьмемо $\delta = \varepsilon$ необхідна нерівність буде виконана. Отже, $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

Приклад 1.6. *Знайти границю* $\lim\limits_{x\to x_0} x^2$.

$\lim\limits_{x\to x_0} x^2 = \lim\limits_{x\to x_0} x \cdot \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0^2$, згідно з попереднім прикладом.

Визначення 5.3 (Гейне). *Число* $A \in \mathbb{R}$ *називається границею числової функції* $f(x)$, *в точці* x_0, *якщо*

$$\forall\{x_n \neq x_0\}\, x_n \to x_0 \quad f(x_n) \to A.$$

Приклад 1.7. *Знайти границю* $\lim\limits_{x\to 0} sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$x_n = \frac{1}{\pi n}, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0,$$

$$x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1,$$

Отже, згідно з визначенням Гейне границі не існує.

Знаходження границі за допомогою формули Тейлора.

Зміст формули Тейлора полягає у тому, що для диференційовна функція може бути наближена в околі фіксованої точки з будь якою точністю за допомогою полінома. Це і дає можливість при знаходженні границь заміняти, якщо це можливо згідно з умовами задачі, дану функцію поліномом, після чого ніяких труднощів вже бути не може.

Приклад 1.8. *Знайти границю*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+tg(x)} - \sqrt{1+sin(x)}}{x^3}.$$

$$\frac{\sqrt{1+tg(x)} - \sqrt{1+sin(x)}}{x^3} = \frac{tg(x) - sin(x)}{x^3\left(\sqrt{1+tg(x)} + \sqrt{1+sin(x)}\right)} \sim$$

Якщо $a(x) \to a$, то функції $a(x)b(x)$ і $ab(x)$ мають однакові границі. ***Позначення:*** $a(x)b(x) \sim ab(x)$.

$$\sim \frac{tg(x) - sin(x)}{2\,x^3} = \frac{sin(x)\left(\frac{1}{cos(x)} - 1\right)}{2\,x^3} \sim$$

Якщо множник замінити на перший член ряду Тейлора, то границя функції не зміниться. Така заміна також позначається $\sim$

$$\left\{ sin(x) = x + \cdots, \qquad 1 - cos(x) = \frac{x^2}{2} + \cdots \right\}$$

$$\sim \frac{\left(\frac{1}{cos(x)} - 1\right)}{2\,x^2} = \frac{1 - cos(x)}{2\,x^2 cos(x)} \sim \frac{1}{4}.$$

Приклад 1.9. *Знайти границю*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{cos(x)}-\sqrt[3]{cos(x)}}{x^2}$$

$$\left\{cos(x) = \ 1-\frac{x^2}{2}+\alpha x^2, \qquad \alpha\to 0\ \right\}$$

$$\frac{\sqrt{cos(x)}-\sqrt[3]{cos(x)}}{x^2}=\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\alpha x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1-\frac{x^2}{2}+\alpha x^2\right)^{\frac{1}{3}}}{x^2}=$$

$$\{(1+x)^n = 1+nx+\beta(n)x, \qquad \beta(n)\to 0\ \}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\alpha x^2\right)+\beta_1\left(-\frac{x^2}{2}+\alpha x^2\right)-\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}+\alpha x^2\right)+\beta_2\left(-\frac{x^2}{2}+\alpha x^2\right)}{x^2}\sim$$

$$\sim\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12}.$$

Приклад 1.10. *Знайти границю*

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(a+x)tg(a-x)-tg^2x}{x^2}$$

$$\left\{tg(a+x)=tg(a)+\frac{x}{cos^2a}+\frac{x^2sin(a)}{2cos^2a}+\beta_1x^3, \qquad \beta_1\to 0\ \right\}$$

$$\left\{tg(a-x)=tg(a)-\frac{x}{cos^2a}-\frac{x^2sin(a)}{2cos^2a}+\beta_2x^3, \qquad \beta_2\to 0\ \right\}$$

$$\frac{tg(a+x)tg(a-x)-tg^2x}{x^2}=$$

$$\frac{\left(tg(a)+\frac{x}{cos^2a}+\frac{x^2sin(a)}{2cos^2a}+\beta_1x^3\right)\left(tg(a)-\frac{x}{cos^2a}-\frac{x^2sin(a)}{2cos^2a}+\beta_2x^3\right)-tg^2a}{x^2}\sim$$

$$\sim-\frac{1}{cos^4a}.$$

Знаходження границі за допомогою правила Лопіталя.

В тих випадках, коли неможливо застосувати формулу Тейлора, може допомогти правило Лопіталя

Приклад 1.11. *Знайти границю*

$$\lim_{x\to 1}\frac{sin(\pi x^{\alpha})}{sin(\pi x^{\beta})}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{sin(\pi x^{\alpha})}{sin(\pi x^{\beta})} = \lim_{x\to 1}\frac{\alpha cos(\pi x^{\alpha})x^{\alpha-1}}{\beta cos(\pi x^{\beta})x^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Відповідь коректна лише тоді, коли остання границя існує.

Приклад 1.12. *Знайти границю*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}, \ \ n > 1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{-n}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{-nx^{-n-1}}{\frac{-2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{nx^{-n+2}}{2e^{\frac{1}{x^2}}} = \cdots = 0.$$

§2. Похідна.

Елементарні функції мають такі похідні:

1) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \ \alpha \in \mathbb{R}$;
2) $(e^x)' = e^x$;
3) $\left(sin(x)\right)' = cos(x)$;
4) $\left(cos(x)\right)' = -sin(x)$;
5) $\left(tg(x)\right)' = \frac{1}{cos^2 x}$;
6) $\left(ctg(x)\right)' = -\frac{1}{sin^2 x}$;
7) $\left(ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$;
8) $\left(arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
9) $\left(arccos(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10) $\left(arctg(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}$;
11) $\left(arcctg(x)\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

Похідна любої функції від елементарної функції знаходиться за допомогою відомих її властивостей. Як правило труднощі в такому випадку можуть бути виключно пов'язані з громіздкістю викладок. Отже наведемо лише один приклад, який іноді може складати труднощі, во він вимагає застосування неочевидного прийому.

Знаходження похідної на основі арифметичних властивостей.

Приклад 2.1. *Знайти похідну функції* $f(x)^{g(x)}$.

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)ln\left(f(x)\right)}\right)' = e^{g(x)ln\left(f(x)\right)}\left(g(x)ln\left(f(x)\right)\right)' =$$

$$f(x)^{g(x)}\left(\left(g(x)\right)' ln\left(f(x)\right) + g(x)\frac{\left(f(x)\right)'}{f(x)}\right).$$

Два других приклади вимагають заходження похідної за визначенням.

Знаходження похідної по визначенню.

Приклад 2.2. *Знайти похідну в точці 0 функції*

$$f(x) = \begin{cases} xsin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ x, & x = 0 \end{cases}$$

Перевіримо спочатку функцію на неперервність. Границя функції в точці 0 дорівнює 0, оскільки в околі нуля вона є добутком нескінченно малої і обмеженої. Похідна не існує, тому що (див. приклад 1.7)

$$\left(f(x)\right)' = \lim_{x \to 0} sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

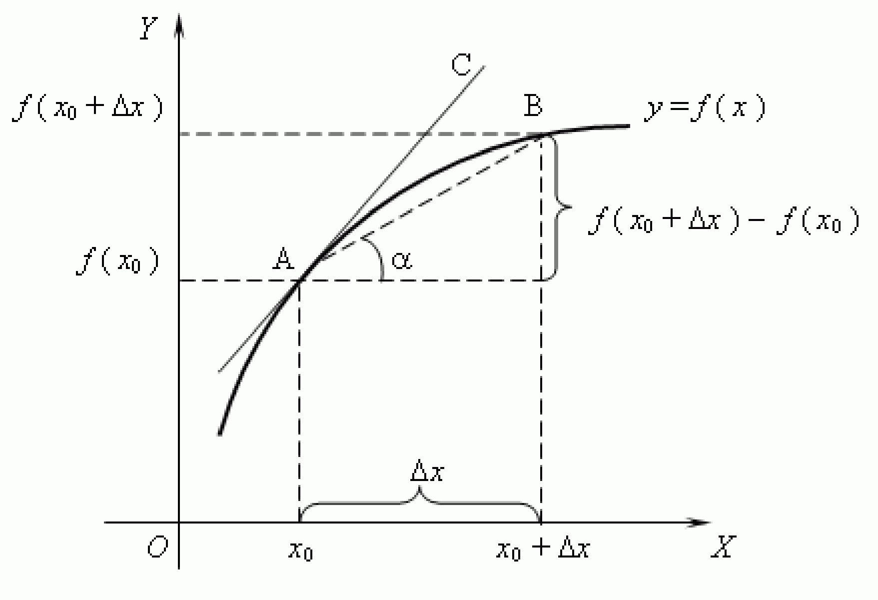
Приклад 2.3. *Знайти похідну в точці 0 функції*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ x, & x = 0 \end{cases}$$

Функція неперервна на тих же засадах, що й в попередньому прикладі.

$$\left(f(x)\right)' = \lim_{x \to 0} xsin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Геометричний сенс похідної.



Визначення дотичної. *Дотичною називається граничне положення січної, одна з точок перетину січної з кривою фіксується, а друга – наближається до першої.*

Якщо $\Delta x \to 0$,

$$\text{січна} \to \text{дотична},$$

$$\text{тангенс січної} \to \text{тангенс дотичної},$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0),$$

$$\text{тангенс січної} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0) = \text{тангенс дотичної}.$$

Отже рівняння дотичної має вигляд:

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$

Механічний сенс похідної.

Нехай об’єкт рухається за законом $S(t)$, де S – відстань, на яку переміщується об’єкт за час t. Тоді середня швидкість з моменту t_0 до моменту $t_0+\Delta t$ дорівнює $\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$, яка тим точніше дає оцінку швидкості в точці t_0, чим менший проміжок часу Δt. Отже миттєва швидкість дорівнює $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$, тобто швидкість є похідна від відстані. Аналогічно, прискорення є похідна від швидкості.

§3. Первісна (невизначений інтеграл).

Для обчислення первісної є не так багато можливостей. Крім лінійності є лише інтегрування по частинах і заміна змінної. Є також найпростіші приклади, які прийнято називати табличними:

1) $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \in \mathbb{R}$;
2) $\int e^{x} dx = e^{x} + C$;
3) $\int sin(x) dx = -cos(x) + C$;
4) $\int cos(x) dx = sin(x) + C$;
5) $\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tg(x) + C$;
6) $\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -\, ctg(x) + C$;
7) $\int \frac{1}{x} dx = ln(x) + C$;
8) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsin(x) + C$;
9) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg(x) + C$;
10) $\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} ln\left(\left|\frac{x-1}{x=1}\right|\right) + C$;
11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$;

Знаходження первісної за допомогою заміни змінної.

Це можна робити двома засобами: або зробити так, щоб під інтегралом все було залежне від однієї якоїсь функції, або зразу зробити заміну, щоб підінтегральна функція стала простішою.

І ми використовуємо «формулу» Лейбниця (див. зауваження 9.1):

$$df(x) = \big(f(x)\big)' dx.$$

Приклад 3.1. *Знайти первісну функції* $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$.

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{1}{e^{2x}+1} de^x = \{e^x = y\} =$$

$$\int \frac{1}{y^2+1}dy = arctg(y) + C = arctg(e^x) + C.$$

Приклад 3.2. *Знайти первісну функції* $\sqrt{1-x^2}$.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \{x = sin(y)\} = \int \sqrt{1-sin^2y}\,dsin(y) =$$

$$\int cos^2y\,dy = \frac{1}{2}\int \big(1+cos(2y)\big)dy = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{2}sin(2y)\right) + C =$$

$$\frac{1}{2}\left(y + \frac{sin(y)cos(y)}{4}\right) = \frac{4\,arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}}{8} + C.$$

З найбільш відомих стандартних замін є підстановки Ейлера для функцій $f\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)$:

1) $ax^2+bx+c = \big(\sqrt{a}x + y\big)^2, a > 0;$

2) $ax^2+bx+c = \big(xy + \sqrt{c}\big)^2, c > 0;$

3) $ax^2+bx+c = y(x-x_1)^2,\ ax_1^2 + bx_1 + c = 0,$

А також для раціональних функцій від $sin(x),\ cos(x)$:

$$sin(x) = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \qquad cos(x) = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \qquad dx = \frac{dtg(x)}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

Знаходження первісної інтегруванням по частинах.

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Приклад 3.3. *Знайти первісну функції* $ln(x)$.

$$\int ln(x)dx = ln(x)x - \int xdln(x) = ln(x)x - \int dx = ln(x)x - x + C.$$

Приклад 3.4. *Знайти первісну функції* $xsin(x)$.

$$\int xsin(x)dx = -\int xdcos(x) = -xcos(x) + \int cos(x)dx =$$

$$-xcos(x) + sin(x) + C.$$

Знаходження первісної раціональної функції.

Довільна раціональна функція може бути представлена як лінійна комбінація полінома і функцій $\frac{1}{(x-a)^k}$, $\frac{1}{(x^2+px+q)^k}$, а самі ці функції є інтегровними, хоч остання лише в рекурентному вигляді.

А саме: якщо $I_k = \frac{1}{(x^2+px+q)^k}$, то

$$I_k = \int \frac{1}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{x}{(x^2+px+q)^k} - \int xd\frac{1}{(x^2+px+q)^k}$$

$$I_k - \frac{x}{(x^2+px+q)^k} = k\int \frac{2x^2+px}{(x^2+px+q)^{k+1}} dx =$$

$$2kI_k - \int \frac{px+2q}{(x^2+px+q)^{k+1}} dx =$$

$$2kI_k - \frac{p}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{k+1}} dx + \frac{p^2+4q}{2}\int \frac{1}{(x^2+px+q)^{k+1}} dx$$

Отже,

$$(2k-1)I_k + \frac{2x-p}{2(x^2+px+q)^k} + \frac{p^2+4q}{2} I_{k+1} = 0$$

і інтегрування раціональних функцій зводиться до подання у зазначеному вище вигляді.

Приклад 3.5. *Представити у елементарному вигляді раціональну функцію* $\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

$$\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{(x-1)(x^4+x^2+1)}.$$

$$x^4+x^2+1 = (x^2+px+1)(x^2+qx+1)$$

Таке подання повинне існувати згідно з теоремами алгебри. Далі знаходимо p, q: $p+q=0,\ pq=-1 \Rightarrow p=1,\ \ q=-1$.

$$\frac{1}{(x-1)(x^4+x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{x^2-x+1},$$

$$1 = A(x^4 + x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1)(x^2 - x + 1)$$

$$+(Dx + E)(x - 1)(x^2 + x + 1),$$

$$1 = A(x^4 + x^2 + 1) + (Bx + C)(x^3 - 2x^2 + 2x - 1)$$

$$+(Dx + E)(x^3 - 1),$$

Підставляючи $x = 1$, маємо $A = \frac{1}{3}$.

Коефіцієнт при x^4: $A + B + D = 0$.

Коефіцієнт при x^3: $C - 2B + E = 0$.

Коефіцієнт при x^1: $2C - B - D = 0$.

Коефіцієнт при x^0: $A - C - E = 1$.

Складаючи коефіцієнти при x^4 і x^1, маємо $C = -\frac{1}{6}$, складаючи коефіцієнти при x^3і x^0, маємо $B = \frac{1}{6}, E = A - C - 1 = -\frac{1}{2}, D = -A - B = -\frac{1}{2}$

Диференційний біном.

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx.$$

Цей інтеграл береться лише в трьох випадках: коли є цілою степінь p, в цьому випадку $x = y^q$, так, щоб позбутися коренів; а двох других випадках діє одна з двох підстановок $a + bx^n = y^q$ або $ax^{-n} + b = y^q$, і q дорівнює знаменнику p.

Приклад 3.6. *Знайти первісну функції* $\frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^2} dx = \{x = y^6\} = \int \frac{y^3}{(1 + y^2)^2} dy^6.$$

Приклад 3.7. *Знайти первісну функції* $\sqrt{x^3 + x^4}$

$$\int \sqrt{x^3 + x^4} dx = \int x^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + x} dx = \int x^2 \sqrt{x^{-1} + 1} dx.$$

$$\{1 + x = y^2\}$$

$$= \int (y^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \, y \, d(y^2 - 1).$$

$$\{x^{-1} + 1 = y^2\}$$

$$= \int (y^2 - 1)^{-2} \, y \, d(y^2 - 1)^{-1}.$$

В останньому випадку ми позбуваємся коренів в підінтегральному виразі.

§4. Застосування визначеного інтегралу.

Геометричний сенс визначеного інтегралу.

Основний сенс визначеного інтегралу є площа під графіком функції, яку називаємо криволінійною трапецією. Це витікає з того факту, що верхня інтегральна сума є площа прямокутників, що покривають криволінійну трапецією і вона завжди більша або дорівнює площі під графіком, а нижня інтегральна сума – навпаки. З критерію інтегровності витикає, що різниця між верхній і нижній сумами стає як завгодно малою при зменшенні ширини прямокутників. Отже число, що знаходиться між значеннями верхньої і нижньої інтегральних сум не може бути нічим іншим, як площею криволінійної трапеції.

Але інтегральна сума може мати і інші геометричні або фізичні інтерпретації, аналогічно тому, як мала різні інтерпретації похідна функції.

Перехід від інтегральної суми до визначеного інтегралу.

Частина задач на застосування визначеного інтегралу формулюється як текстові і тоді необхідно складати інтегральну суму, а потім, виходячи з неї, і інтеграл.

Приклад 4.1. *Вивести формулу для обчислення об'єму фігури через площі перерізів.*

Нехай перерізи об'ємної фігури ортогональні осі абсцис і дорівнюють $S(x),\ a \le x \le b$. Якщо перерізи $S(x_i)$ розділяють фігуру на шари товщиною Δx_i, то приблизний об'єм дорівнює $\sum_i S(x_i)\,\Delta x_i$, а точний – $\int_a^b S(x)dx$.

Об'єм прямого кругового конусу висотою H і радіусом R дорівнює

$$\int_0^H \pi\left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 \int_0^H x^2 dx = \pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}(H^3 - 0^3) = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Приклад 4.2. *Вивести формулу для обчислення довжини лінії, заданої параметрично:* $x = x(t), y = y(t),\ a \le t \le b$.

Для простоти уявлення будемо вважати, що t є час. Розділимо множину визначення параметра на відрізки Δt_i, тоді, якщо $v(t_i)$ – швидкість в момент t_i, то довжина траєкторії приблизно дорівнює $\sum_i v(t_i)\,\Delta t_i$, а точно –

$$\int_a^b v(t)dt = \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt\,.$$

Якщо крива $y = y(x), a \le x \le b$, то довжина дорівнює

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx.$$

Довжина кола $x^2 + y^2 = R^2$дорівнює

$$4\int_0^R \sqrt{1 + \left(\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)'\right)^2} dx = 4\int_0^R \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx =$$

$$4\int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx = 2R\int_0^R \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}\, d\left(\frac{x}{R}\right) = 4R\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy =$$

$$= 4R\ arcsin 1 = 2\pi.$$

Приклад 4.3. *Вивести формулу для обчислення площі сектора, заданого кривою в полярних координатах:* $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$.

Розділимо весь сектор на малі. Їх площа приблизно дорівнює $\sum_i \frac{1}{2}\rho^2(t_i)\,\Delta\varphi_i$, а точно – $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi$. Площа круга $\rho = R$ дорівнює

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2\,d\varphi = \pi R^2.$$

Приклад 4.4. *Вивести формулу для обчислення довжини лінії, заданої в полярних координатах:* $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$.

Підставимо $x = \rho(t)\cos\big(\varphi(t)\big), y = \rho(t)\sin\big(\varphi(t)\big)$ в формулу для довжини кривої:

$$\int_a^b \sqrt{\left(\left(\rho(t)\cos\big(\varphi(t)\big)\right)'\right)^2 + \left(\left(\rho(t)\sin\big(\varphi(t)\big)\right)'\right)^2}\,dt =$$

$$\int_a^b \sqrt{\left(\rho_t'\cos\big(\varphi(t)\big) - \rho\sin(\varphi)\varphi_t'\right)^2 + (\rho_t'\sin(\varphi) + \rho\cos(\varphi)\varphi_t')^2}dt =$$

$$\int_a^b \sqrt{(\rho_t')^2 + (\rho\,\varphi_t')^2}dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\rho_t'}{\varphi_t'}\right)^2 + \rho^2}\ \varphi_t' dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\rho_\varphi'\right)^2 + \rho^2}\ d\varphi.$$

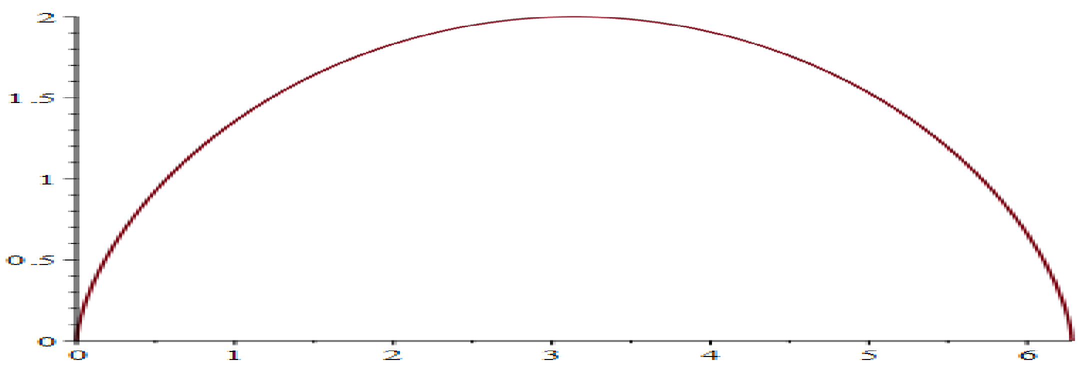
Довжина кола $\rho = R$ дорівнює

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2}\ d\varphi = 2\pi R.$$

Знаходження площі.

Приклад 4.5. *Знайти площу під циклоїдою*

$$x = t - \sin(t), y = 1 - \cos(t).$$

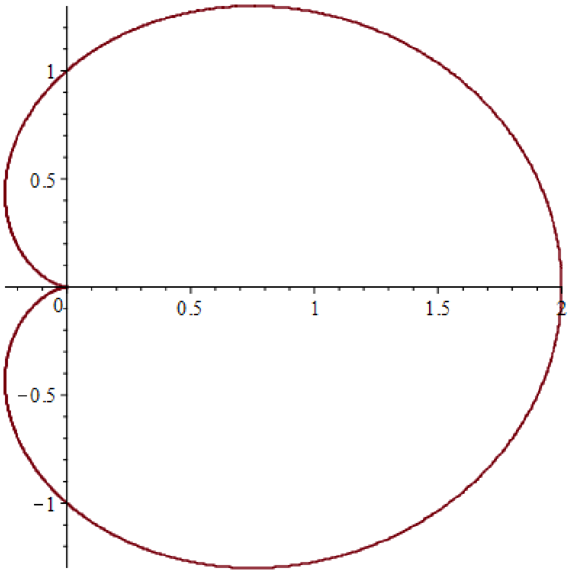


$$\int_0^{2\pi} y(t)dx(t) = \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))d\big(t - \sin(t)\big) = \int_0^{2\pi} \big(1 - \cos(t)\big)^2 dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos(t) + \frac{1 + \cos(2t)}{2}\right) dt = 3\pi.$$

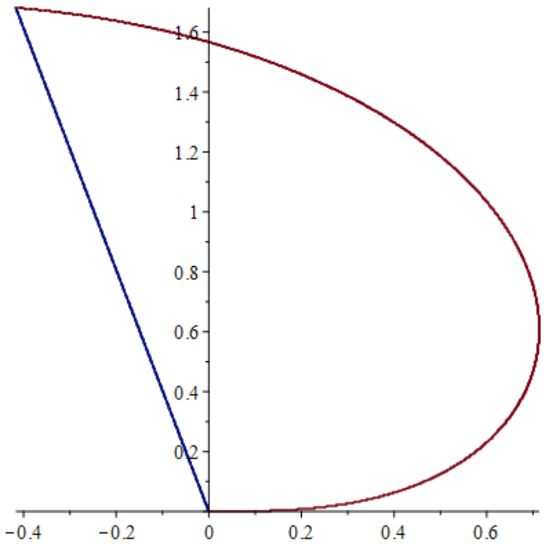
Приклад 4.6. *Знайти площу кардіоїди*

$$r(\varphi) = 1 + cos\varphi.$$



$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2cos(t)+\frac{1+cos(2t)}{2}\right)dt = \frac{3}{2}\pi.$$

Приклад 4.7. *Знайти площу області обмеженої променем* $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ *і кривою* $\varphi = r\,arctg(r)$.



Легко помітити, що r змінюється від 0 до $\sqrt{3}$. Отже, площа дорівнює

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} r^2 d\big(r\,arctg(r)\big) = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} r^2\left(arctg(r) + \frac{r}{1+r^2}\right)dr =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} r^2 arctg(r)\,dr + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3}{1+r^2}dr =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^{\sqrt{3}} arctg(r)\,dr^3 + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3}{1+r^2}dr =$$

$$\frac{1}{6}r^3 arctg(r)|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\int_0^{\sqrt{3}} r^3\,d\big(arctg(r)\big) + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3}{1+r^2}dr =$$

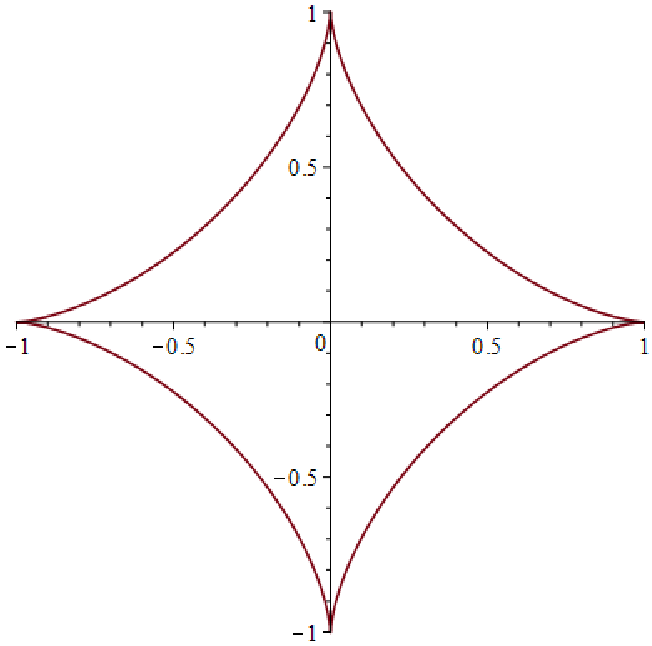
$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3}{1+r^2}\,dr = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^2}{1+r^2}d(1+r^2) =$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\int_1^4 \frac{u-1}{u}du = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}ln2.$$

Знаходження довжини дуги.

Приклад 4.8. *Знайти довжину астроїди*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.$$



Задамо кардіоїду в параметричному вигляді:

$$x = cos^3(t), \qquad y = sin^3(t).$$

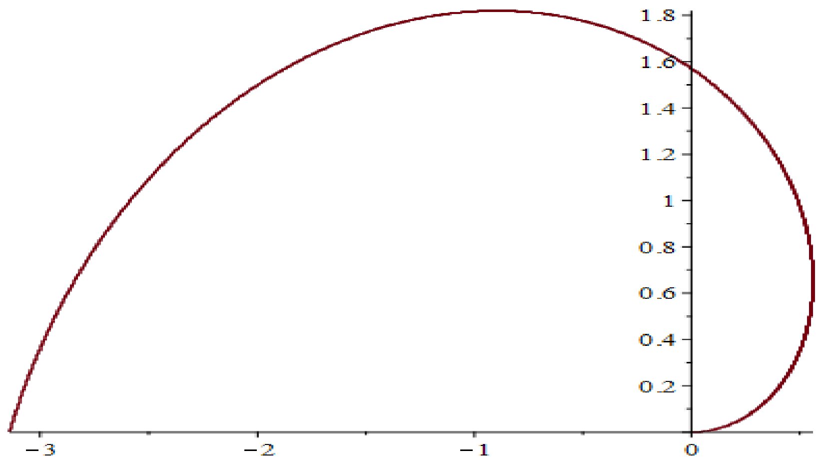
$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(-3cos^2(t)sin(t)\right)^2 + \left(3sin^2(t)cos(t)\right)^2}\, dt =$$

$$12\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)cos(t)\sqrt{cos^2(t) + sin^2(t)}\, dt = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)cos(t)\, dt =$$

$$6\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(2t)\, dt = 6.$$

Приклад 4.9. *Знайти довжину спіралі Архімеда*

$$r = \varphi, \varphi \in (0, 2\pi).$$



$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\rho'_\varphi\right)^2 + \rho^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi = \{\varphi = tg(t)\} =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{cos^3(\boldsymbol{t})} dt = \int_0^{arctg(2\pi)} \frac{1}{cos^4(t)} dsin(t) = \int_0^{sin(arctg(2\pi))} \frac{1}{(1 - u^2)^2} du =$$

$$\left\{a = sin\left(arctg(2\pi)\right) \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} = 2\pi \Rightarrow sin\left(arctg(2\pi)\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{4\pi^2 + 1}}\right\}$$

$$\left(\frac{1}{4}\ln\frac{1+u}{1-u} + \frac{u}{2(1-u^2)}\right)\Big|_0^{sin(arctg(2\pi))} = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{4\pi^2+1} + 2\pi}{\sqrt{4\pi^2+1} - 2\pi} + \pi\sqrt{4\pi^2 + 1} =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi\right)+\pi\sqrt{4\pi^2+1}.$$

Знаходження об'єму.

Приклад 4.10. *Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:*

$$x+y+z^2=1, x=0, y=0, z=0.$$

Знайдемо площу перетину площиною $z=z_0$. Пряма $x+y=1-z_0^2$ разом з осями координат , $x=0, y=0$, утворює трикутник з площею $\frac{(1-z_0^2)}{2}$, який зникає при $z_0=1$. Отже, об'єм тіла дорівнює

$$\int_0^1 \frac{(1-z^2)^2}{2}dz=\frac{4}{15}.$$

Приклад 4.11. *Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навкруг осі ординат фігури* $a\le x\le b, 0\le y\le f(x)$.

Прямокутник з основою $[x_{i-1}, x_i]$ і висотою $f(x_i)$ при обертанні навколо осі ординат утворює циліндр об'ємом $\pi\left(x_i^2-x_{i-1}^2\right)f(x_i)$, значить інтегральна сума буде дорівнювати

$$\sum_i \pi\left(x_i^2-x_{i-1}^2\right)f(x_i)=2\pi\sum_i \frac{x_{i-1}+x_i}{2}f(x_i)(x_i-x_{i-1}),$$

отже інтеграл буде мати вигляд:

$$2\pi\int_a^b f(x)\,xdx.$$

ВСТУП В ЛІНІЙНУ АЛГЕБРУ

Одним з найважливіших розділів вищої математики є лінійна алгебра. За кількістю застосувань в самій математиці, фізиці та механіці лінійна алгебра порівняна з такими розділами, як математичний аналіз і диференціальні рівняння. Що ж стосується застосувань за межами математичних теорій, то, скажімо, в економіці лінійна алгебра не має конкурентів і породжує цілу теорію, яку прийнято називати лінійним програмуванням.

На основі лінійної алгебри будується функціональний аналіз, який в свою чергу є апаратом квантової механіки. Нарешті, принципи лінійної алгебри використовує теорія, що дозволяє кодувати звукові гармонійні сигнали, тобто музику і мову. А це не мало не багато – цифрові технології.

Цих причин більш ніж достатньо, щоб приступити до вивчення основ лінійної алгебри.

§1. Аксіоми лінійного простору

Визначення 1.1. *Множина V називається лінійним (векторним) простором над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, якщо в ньому визначені операції додавання і множення на дійсне число і при цьому виконуються наступні умови (аксіоми):*

1. *Існує $(\exists)$ елемент лінійного простору вектор 0, такий що для довільного елементу x лінійного простору V*

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

2. *Для любого $(\forall)$ вектору $x \in V$ існує вектор $-x$, який називається протилежним до x, такий що*

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3. *Операція додавання асоціативна, тобто $\forall x, y, z \in V$*

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

4. *Операція додавання комутативна, тобто $\forall x, y \in V$*

$$x + y = y + x$$

5. *Добуток дійсної одиниці на вектор: $\forall x$*

$$1 \cdot x = x.$$

6. *Операція множення асоціативна, тобто $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in V$*

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x.$$

7. *Операція множення зліва дистрибутивна по відношенню до додавання, $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in V$*

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$$

8. *Операція множення справа дистрибутивна по відношенню до додавання, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in V$*

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

Приклад 1.1. *Лінійним простором є множина дійсних чисел.*

Приклад 1.2. *Лінійним простором є множина наборів з n чисел з операцією додавання:*

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

і множення на дійсне число:

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Такий лінійний простір далі будемо називати координатним лінійним простором $\mathbb{R}^n$.

Приклад 1.2. *Лінійними просторами є названі нижче функціональні простори:*

(а) числовий функцій;

(б) неперервних функцій;

(в) диференційовних функцій;

(г) періодичних з визначеним періодом функцій;

по відношенню до звичайних операцій додавання функцій та множення на число.

Визначення 1.2. *Вектори* $x_1, \dots, x_n$ *називаються лінійно залежними, якщо існує такий набір чисел* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, *в якому є хоча б один ненульовий елемент, що* $\alpha_1 x_1 + \ \dots + \alpha_n x_n = 0$.

Вектори $x_1, \dots, x_n$ *називаються лінійно незалежними, якщо такого набору не існує.*

Визначення 1.3. *Лінійно незалежна система векторів, яка стає залежною разом з доданим довільним вектором, називається базисом лінійного простору.*

Визначення 1.4. *Система векторів* $e_1, \dots, e_n$, *називається базисом лінійного простору, якщо довільний вектор* x *має однозначне подання:*

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,$$

Числа $x_1, \dots, x_n$ *при цьому називаються координатами вектору* x.

Зауваження 1.1. *Еквівалентність визначень 1.3 і 1.4 витікає з теореми 1.3.*

Приклад 1.3. *Вектори* e_i $(i = 1, \dots, n)$ *координатного простору, в яких всі координати нульові, окрім* i*-тої, яка дорівнює одиниці, тобто*

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

$$\dots$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 1),$$

утворюють базис координатного простору, тому що

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Позначення. *Базис $e_1, \dots, e_n$ з наведеного прикладу називається канонічним у координатному просторі.*

Теорема 1.1. *В координатному просторі $\mathbb{R}^n$ будь-які $n+1$ векторів лінійно залежні.*

Доведення (по індукції). Для $n = 1$ твердження очевидне. Нехай воно вірне для $n = k$. Маємо довільні вектори $x_1, \dots, x_{k+1}$. Тоді по індукційному припущенню існують такі коефіцієнти $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, що

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = (\lambda, 0, \dots 0)$$

і, наприклад, α_i відмінно від нуля. Також існує набор $\beta_1, \dots, \beta_k$, такий, що

$$\beta_1 x_1 + \dots + \beta_{i-1} x_{i-1} + \beta_i x_{i+1} + \dots + \beta_k x_{k+1} = (\mu, 0, \dots 0),$$

отже

$$\mu(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k) - \lambda(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_{i-1} x_{i-1} + \beta_i x_{i+1} + \dots + \beta_k x_{k+1}) = 0$$

і коефіцієнт при векторі x_i ненульовий.

Теорема 1.2. *В координатному просторі $\mathbb{R}^n$ будь-які $n-1$ векторів не утворюють базис.*

Доведення (від протилежного). Нехай $x_1, \dots, x_{n-1}$ є базис у $\mathbb{R}^n$, тоді існує подання $e_1 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$, в якому e_1 – вектор канонічного базису і хоч один з коефіцієнтів α_i ненульовий; його можна замінити на e_1і отриманий набір також буде базисом. Повторюючи цю операцію $n-1$ разів відповідно з векторами $e_2, e_3, \dots$ отримаємо базис $e_1, \dots, e_{n-1}$, що неможливо.

Визначення 1.4. *Розмірністю лінійного простору V називається кількість векторів базису V.*

Позначення: $\dim V$.

Наслідок 1.1 $dim\mathbb{R}^n = n$.

Теорема 1.3. *В довільному лінійному просторі кожен вектор має однозначне подання:* $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, *якщо* $e_1, \ldots, e_n$ *– базис.*

Доведення. Система векторів $x, e_1, \ldots, e_n$ згідно з визначеннями є лінійно залежною, тобто $\alpha_0 x + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$, причому α_0 не може дорівнювати нулю. Таким чином, ми отримуємо подання для вектору x і воно є однозначним, бо в протилежному випадку, віднімаючи друге подання, ми отримуємо залежність базисних векторів.

Визначення 1.5. *Коефіцієнти подання* $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, *де* $e_1, \ldots, e_n$ *– базис, називаються координатами вектору* x *у базисі* $e_1, \ldots, e_n$.

Визначення 1.6. *Лінійні простори* V_1, V_2 *називаються ізоморфними, якщо між ними існує взаємно однозначна відповідність* $\varphi: V_1 \leftrightarrow V_2$, *така, що* $\forall x, y \in V_1$ $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$.

Теорема 1.4. *Довільні лінійні простори однакової розмірності ізоморфні.*

Доведення. Відображення $\varphi: V_1 \leftrightarrow V_2$ вибирається так, щоб відповідні вектори просторів мали однакові координати у вибраних у них базисах.

§2. Об'єм n-вимірного паралелепіпеду.

Визначення 2.1. *Декартовим добутком множин* $M_1, \ldots, M_k$ *називається множина, яка складається із всіх можливих наборів* $\{(m_1, \ldots, m_k), m_i \in M_i\}$.

Позначення: $M_1 \times \ldots \times M_k$.

Визначення 2.2. *Відображення декартового добутку лінійних просторів в лінійний простір* $\Phi: V_1 \times \ldots \times V_k \to V$ *називається полілінійним, якщо* $\forall i$

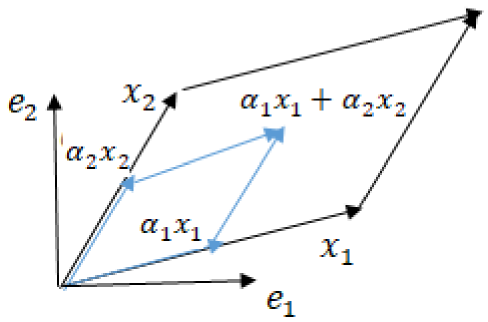
$$\Phi(v_1, \ldots, \alpha v_i + \beta v_i', \ldots, v_k) = \alpha\Phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \beta\Phi(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k).$$

Визначення 2.3. *Нехай* $x_1, \ldots, x_n$ *- довільні вектори* n *-вимірного простору, тоді* n *-вимірним паралелепіпедом називається фігура, що складається з точок*

$$\left\{x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,\ \ 0 \le \alpha_i \le 1\right\}.$$

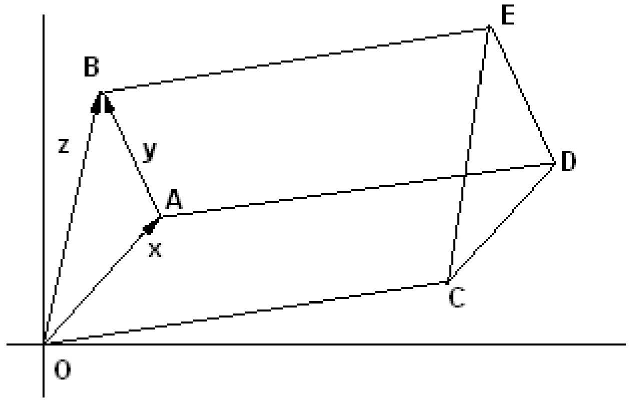
Вектори $x_1, \dots, x_n$ *називаються направляючими векторами паралелограма.*

Приклад 2.1. *Для простору* $\mathbb{R}^2$ *двовимірним паралелепіпедом є паралелограм:*



Зауваження 2.1. *Площа паралелограму є білінійною функцією від векторів* x_1, x_2*, що його задають.*

Цей факт є наглядно очевидним при розтягуванні векторів x_i. *Менш очевидно, що якщо замінити один з векторів* x_i *на суму двох других, то два нових паралелограмів мають ту ж сумарну площу, що й попередній. Це видно з малюнка.*



Площа паралелограму $OBEC$ *дорівнює сумі площ* $OADC$ *і* $ABED$.

Аналогічно, об'єм паралелепіпеду є трилінійною функцією від векторів x_1, x_2, x_3*, що його задають. При розтягуванні цей факт наявно очевидний, а щодо суми об'ємів, то картинка остається такою ж зрозумілою, якщо до паралелограмів додати ще один вектор, трансверсальний площині, який є* *додатковий вектором, що утворює з паралелограмів паралелепіпед з направляючими векторами* x, y, z.

Отже є природним наступне

Визначення 2.4. *Об'ємом* n*-вимірного паралелепіпеду називається* n*-лінійна функція з додатковою умовою, що об'єм дорівнює нулю, якщо вектори* $x_1, \dots, x_n$*, що задають паралелепіпед лінійно залежні, а також с умовою нормування:* $V(e_1, \dots, e_n) = 1$*, де* $e_1, \dots, e_n$*- базисні вектори.*

Зауваження 2.2. *Властивість лінійності об'єму приводить до можливості від'ємного об'єму.*

Визначення 2.5. *Базис* $x_1, \dots, x_n$ *називається позитивно, відповідно негативно, орієнтованим, якщо* $V(x_1, \dots, x_n) > 0$*, відповідно* $V(x_1, \dots, x_n) < 0$.

Наслідок 2.1. *Функція об'єму кососиметрична, тобто*

$$V\left(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\right) = -V\left(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n\right).$$

Доведення. З визначення об'єму витікає

$$0 = V\left(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n\right) =$$
$$V(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) + V\left(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\right) +$$
$$V\left(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n\right) + V\left(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n\right) =$$
$$V\left(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\right) + V\left(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n\right).$$

Приклад 2.2. *Площа паралелограму з направляючими векторами* $x_1 = (x_{11}, x_{12}), x_2 = (x_{21}, x_{22})$ *дорівнює:*

$$V(x_1, x_2) = V(x_{11}e_1 + x_{12}e_2, x_{21}e_1 + x_{22}e_2) =$$
$$x_{11}x_{21}V(e_1, e_1) + x_{11}x_{22}V(e_1, e_2) + x_{12}x_{21}V(e_2, e_1) + x_{12}x_{22}V(e_2, e_2) =$$
$$(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})\, V(e_1, e_2) = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}.$$

Аналогічно, об'єм паралелепіпеду з направляючими векторами $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13}), x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23}),\ x_3 = (x_{31}, x_{32}, x_{33})$ *дорівнює:*

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{11}x_{23}x_{32} -$$
$$x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31}.$$

§3. Визначник

Визначення 3.1 *Число інверсій* $\sigma(1,\dots,n)$ *перестановки* $(1,\dots,n)$ *цілих чисел є кількість пар набору, у яких перше число пари більше другого.*

Теорема 3.1. *Об'єм* n *-вимірного паралелепіпеду з направляючими векторами* $x_1=(x_{11},\dots,x_{1n}),\dots,x_n=(x_{n1},\dots,x_{nn})$ *дорівнює*

$$\sum_{(i_1,\dots,i_n)}(-1)^{\sigma\,(i_1,\dots,i_n)}x_{1i_1},\dots,x_{ni_n}.$$

Тут сума береться по всім перестановкам $(i_1,\dots,i_n)$ *цілих чисел від 1 до* n, $\sigma\,(i_1,\dots,i_n)$ *– число інверсій набору* $(i_1,\dots,i_n)$.

Для матриці $\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{n1} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix}$ *це число називається визначником або детермінантом і позначається:*

$$det\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{n1} & \cdots & x_{nn}\end{pmatrix} \text{ або } \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{n1} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}.$$

Доведення аналогічне обчисленню визначника в прикладі 2.2. Необхідно тільки довести, що парність числа інверсій перестановки $(i_1,\dots,i_n)$ збігається з парністю числа необхідних перестановок векторів $x_1,\dots,x_n$, щоб розмістити їх в порядку зростання. Для доведення цього достатньо помітити, що при перестановці двох сусідніх векторів парність числа інверсій змінюється, а також того, що у перестановки $(1,\dots,n)$ число інверсій дорівнює нулю, тобто $(-1)^{\sigma(1,\dots,n)}=1$.

Визначення 3.2. *Транспонованою до матриці* A *з елементами* A_{ij} *називається матриця* A^T*, елементи якої задовольняють умові:*

$$A_{ij}=(A^T)_{ji},$$

при цьому стовпчики матриці A *стають строками матриці* A^T*, не змінюючи свого порядку.*

Теорема 3.2. *Визначник матриці має наступні властивості:*

(а) не змінюється при транспонуванні, тобто при перестановці елементів x_{ij}, x_{ji}, в матричному запису: $detA = detA^T$;

(б) є лінійною функцією строк та стовпців;

(в) змінює знак при перестановці двох довільних строк або стовпців;

(г) не змінюється при додаванні до довільної строки другої, помноженої на довільний коефіцієнт, те ж вірне для стовпців;

Доведення.

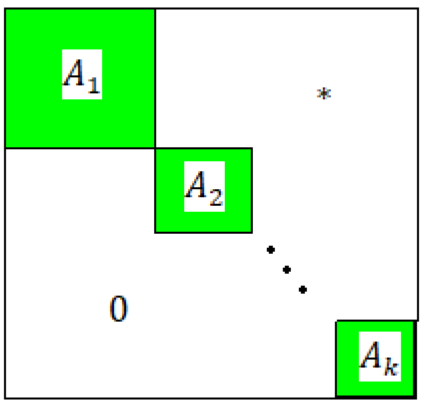
(а) Знак перед мономом $x_{1i_1}, \dots, x_{ni_n}$. визначається за допомогою підрахунку кількості інверсій перестановки $(i_1, \dots, i_n)$ або підстановки $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$, якщо в першому рядку записувати перший індекс елемента матриці, а в другому – другий. При цьому вже не обов'язково, щоб перші індекси йшли від 1 до n. При транспонуванні підстановка того ж одночлена прийме вигляд $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ з такою ж парністю числа інверсій.

(б, в) Лінійність і кососиметричність витікає з лінійності об'єма.

(г) Витікає з (б, в).

$$V\left(x_1, \dots, x_i + \mu x_j, \dots, x_j, \dots, x_n\right) = V\left(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\right) +$$
$$\mu V\left(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n\right) = V\left(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\right).$$

Теорема 3.3*. Визначник приведеної нижче квадратної матриці, в якій область, що позначена 0, має всі елементи нульові, область, позначена* $*$*, має довільні елементи, а діагональні матриці* A_i *квадратні,*



дорівнює $|A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_k|$.

Доведення.

Починаючи вибирати по стовпцям елементи згідно з формулою визначника, ми бачимо, з області, позначеної $*$ ми не вибираємо ніяких елементів, а тільки з матриць $A_1, A_2, \ldots, A_k$, причому одночлени ми отримуємо такі ж самі, як і в добутку $|A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_k|$ і з тими ж знаками.

Наслідок 3.1. Визначник матриці, яка під діагоналлю $x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{nn}$ має тільки нульові елементи, дорівнює $x_{11}\cdot x_{22}.\ldots\cdot x_{nn}$.

Позначення 3.1. *Діагональ* $x_{11}\cdot x_{22}.\ldots\cdot x_{nn}$ *називається головною.*

Приклад 3.1. *Обчислити визначник:* $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}$.

Віднімаємо перший рядок від останніх:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & x_2^3-x_1^3 \\ 0 & x_3-x_1 & x_3^2-x_1^2 & x_3^3-x_1^3 \\ 0 & x_4-x_1 & x_4^2-x_1^2 & x_4^3-x_1^3 \end{vmatrix} =$$

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2+x_1 & x_2^2+x_2x_1+x_1^2 \\ 1 & x_3+x_1 & x_3^2+x_3x_1+x_1^2 \\ 1 & x_4+x_1 & x_4^2+x_4x_1+x_1^2 \end{vmatrix}$$

Знову віднімаємо перший рядок від останніх:

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2+x_1 & x_2^2+x_2x_1+x_1^2 \\ 0 & x_3-x_2 & x_3^2-x_2^2+x_3x_1-x_2x_1 \\ 0 & x_4-x_2 & x_4^2-x_2^2+x_4x_1-x_2x_1 \end{vmatrix} =$$

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\begin{vmatrix} 1 & x_3+x_2+x_1 \\ 1 & x_4+x_2+x_1 \end{vmatrix} =$$

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3).$$

Метод приведення матриці з нульовими елементами під головною діагоналлю є метод *Гауса.*

Це є матриця *Ван дер Монда* і визначник її можливо отримати і без обчислень, спираючись на те, що визначник є поліномом, який дорівнює нулю, якщо довільні елементи x_i, x_j виявляються рівними. Це дає всі множники з точністю до коефіцієнта. Коефіцієнт можна отримати лише по одному члену визначника. Так, визначник має одночлен $x_2 x_3^2 x_4^3$.

§4. Лінійне перетворення і його матричне подання.

Визначення 4.1 *Відображення $\varphi: V_1 \to V_2$ лінійних просторів називається лінійним, якщо $\forall x, y \in V_1$*

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y).$$

Ядром відображення називається множина

$$Ker\varphi = \{x \in V_1 : \varphi(x) = 0\},$$

Образом відображення називається множина

$$Im\varphi = \{\varphi(x) \in V_2 : x \in V_1\}.$$

Прообразом $\varphi^{-1}(y)$ елементу $y \in V_2$ називається елемент $x \in V_1$, що $\varphi(x) = y$, повним прообразом елементу $y \in V_2$ називається множина всіх елементів $x \in V_1$, що $\varphi(x) = y$.

Зауваження 4.1. *Множини $Ker\varphi, Im\varphi$ є лінійними просторами.*

Теорема 4.1. *Для лінійного відображення $\varphi: V_1 \to V_2$ має місто співвідношення:*

$$dimV_1 = dimKer\varphi + dimIm\varphi.$$

Доведення. Нехай $e_1, \ldots, e_k$– базис $Ker\varphi$, *а* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$– базис $Im\varphi$. Доведемо, що $e_1, \ldots, e_k, \varphi^{-1}(\varepsilon_1), \ldots, \varphi^{-1}(\varepsilon_l)$ – базис V_1.

Якщо $x \in V_1$, то існує однозначне подання $\varphi(x) = \mu_1\varepsilon_1 + \cdots + \mu_l\varepsilon_l$. Тоді $x - \mu_1\varphi^{-1}(\varepsilon_1) + \cdots + \mu_l\varphi^{-1}(\varepsilon_l) \in Ker\varphi$, отже існує однозначне подання $x - \mu_1\varphi^{-1}(\varepsilon_1) + \cdots + \mu_l\varphi^{-1}(\varepsilon_l) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k$, яке дає однозначне подання вектору x, що завершує доведення.

Якщо в просторах V_1, V_2 вибрати базиси $e_1, \dots, e_k$ і, відповідно, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l$, то при наявності лінійного відображення A мають місто подання образів базисних векторів V_1: $A(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j$, що дозволяє зробити координатний запис лінійного перетворення:

$$y = A(x) = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i A(e_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij}\varepsilon_j \,.$$

Більш зручно, вибравши базиси, далі всі обчислення робити в координатах, причому склалася традиція замість матриці $\{a_{ij}\}$ і запису $y_j = \sum_i x_i a_{ij}$ використовувати транспоновану матрицю і, відповідно запис $y_i = \sum_i a_{ij} x_j$, або у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y = AX.$$

При такому записі відображення і матриця відображення позначаються однією літерою A.

Якщо ми маємо композицію відображень $A: V_1 \to V_2, B: V_2 \longrightarrow V_3$, то $z_i = \sum_i b_{ij} y_j = \sum_{ij} b_{ij} a_{jk} x_k$, або $Z = BY = BAX$.

Визначення 4.2. *Операцію композиції $B \circ A$, записану в матричному вигляді BA будемо називати множенням матриць.*

Зауваження 4.2*. Операція множення матриць є асоціативною, але не обов'язково комутативною. Асоціативність $(AB)C = A(BC)$ витікає із властивості композиції, а відсутність комутативності доводиться будь-яким прикладом. Приведемо майже найпростіший:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Визначення 4.3. *Лінійне відображення простору в себе називається лінійним перетворенням.*

Зауваження 4.3*. Тотожне відображення простору на себе має матрицю з одиницями на головній діагоналі $a_{ii} = 1$ і нулями на інших позиціях*

$a_{ij} = 0, i \neq j$. *Одинична матриця позначається* E *і, очевидно, для любого лінійного перетворення* $A: V \to V, \quad AE = EA = A$.

Матриця лінійного перетворення є квадратною.

Теорема 4.2. $det(AB) = det(A)det(B)$.

Доведення. Перетворення A відображає одиничний куб в паралелепіпед з направляючими векторами $A(e_i)$ об'ємом $det(A)$, отже любий, в тому числі маленький куб при відображенні збільшує свій об'єм в $det(A)$ разів і, таким чином і довільна область лінійного простору також збільшує свій об'єм в $det(A)$ разів. При композиції AB відображень об'єм любої області збільшується в $det(A)det(B)$ разів.

§5. Обернена матриця і метод Крамера розв'язання лінійного рівняння.

Визначення 5.1. *Лінійне перетворення обернене до А позначається* A^{-1}, *в матричному вигляді:* $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

З'ясуємо, як знайти A^{-1}, коли відома матриця A.

Теорема 5.1. *Для довільної квадратної матриці А виконані наступні співвідношення:*

$$\det A = det\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} M_{ij}\, a_{ij},$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} M_{ij}\, a_{kj} = 0,\ k \neq i,$$

де M_{ij} – визначник матриці, отриманої з матриці A, якщо викреслити i-ий рядок і j-ий стовпчик.

Доведення. Елементи суми $det\, M_{ij}$ і $\det A$, що мають співмножник a_{ij} однакові, отже порівняємо їх знаки.

$$\sigma\begin{pmatrix} 1, \dots, i, \dots, n \\ i_1, \dots, j, \dots, i_n \end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix} i, 1, \dots, \blacksquare i, \dots, n \\ j, i_1, \dots, \blacksquare j, \dots, i_n \end{pmatrix} = (-1)^{i+j}\sigma\begin{pmatrix} 1, \dots, \blacksquare i, \dots, n \\ i_1, \dots, \blacksquare j, \dots, i_n \end{pmatrix},$$

де

Позначення 5.1: *$\blacksquare i$, $\blacksquare j$ означають пропущені індекси,*
оскільки відкидання індексів i, j на початку рядків зменшує кількість інверсій на $i-1, j-1$, відповідно.

Щоб довести друге співвідношення, треба замість рядка $a_{i1} \dots a_{in}$ підставити рядок $a_{k1} \dots a_{kn}$.

Визначення 5.2. *Матрицю з елементами $\left((-1)^{i+j}M_{ij}\right)^T$ будемо називати матрицею алгебраїчних доповнень матриці A і позначати $\mathbb{A}$.*

З співвідношень теореми 4.2 витікає, що

$$A\mathbb{A} = \mathbb{A}A = detA\,E \;\Leftrightarrow A\left(\frac{1}{detA}\mathbb{A}\right) = \left(\frac{1}{detA}\mathbb{A}\right)A = E \;\Leftrightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{detA}\mathbb{A}.$$

***Зауваження 5.1**. Якщо систему лінійних рівнянь записати в матричному вигляді $AX = B,\; A \in \mathbb{R}^{n^2}, X, B \in \mathbb{R}^n$, то її розв'язок має вигляд:*

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{detA}\mathbb{A}B.$$

Теорема 5.2 (правило Крамера).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; x_i = \frac{detA_i}{detA},$$

де

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \blacksquare a_{i1}\, b_1 & a_{1n} \\ \dots & \blacksquare \dots \dots \dots & \dots \\ a_{n1} & \blacksquare a_{n1}\, b_n & a_{nn} \end{pmatrix},$$

тобто матриця A_i отримується з матриці A заміною i-того стовпця стовпцем B.

Доведення. Необхідно довести:

$$\sum_j a_{ij} detA_j = detA\, b_i.$$

$$\sum_j a_{ij} detA_j = \sum_j a_{ij} \sum_k (-1)^{k+j} M_{kj} b_k = \sum_{jk} (-1)^{k+j} a_{ij} M_{kj} b_k =$$

$$\sum_k \left(\sum_j (-1)^{k+j} a_{ij} M_{kj} \right) b_k = detA\ \delta_{ik} b_k = detA\ b_i,$$

де δ_{ik}- символ *Кронекера*, що відповідає одиничній матриці.

§6. Інваріантні властивості лінійного перетворення.

При дослідженні будь-якого математичного об'єкту важливу роль грають його інваріантні властивості. Інваріантні означає не змінні при різних поданнях того об'єкту, що вивчається. По суті, тільки такі властивості і представляють інтерес, хоч іноді бувають важливі і деякі характерні особливості, притаманні спеціальнім координатам.

В якості прикладу інваріантних властивостей лінійного перетворення можна привести розмірності ядра і образу.

Наступні поняття, пов'язані з лінійним перетворенням, також мають інваріантний характер, тобто не залежать від вибраного базису.

Визначення 6.1. *Інваріантним простором лінійного перетворення $\varphi: V \to V$ називається такий простір $U \subset V$, що $\varphi: U \to U$.*

Визначення 6.2. *Власним вектором лінійного перетворення $\varphi: V \to V$ називається вектор $x \in V$, такий, що $\varphi(\ x) = \mu\ x,\ \ \mu \in \mathbb{R}$, при цьому значення μ називається власним значенням власного вектору x.*

Зауваження 6.1. *Якщо власні вектори лінійного перетворення утворюють базис лінійного простору, то в цьому базисі матриця перетворення має діагональний вигляд:*

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Визначення 6.3. *Лінійне перетворення називається виродженим, якщо його ядро відмінне від нуля.*

Теорема 6.1. *Лінійне перетворення вироджене, якщо і тільки якщо визначник матриці цього перетворення в любому базисі дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай A – матриця лінійного перетворення і $AX = 0, X \neq 0$, тобто $\forall i \ \sum_j a_{ij}x_j = 0$, а це означає, що стовпці матриці лінійно залежні, що, згідно теореми 3.2 або визначення об'єму n-вимірного паралелепіпеду, означає, що $detA = 0$.

Обернене так само вірне. Матриця з нульовим визначником має лінійно залежні стовпці, а коефіцієнти цієї залежності як раз і утворюють ненульовий вектор ядра перетворення.

Доведена теорема дає можливість знаходити власні вектори лінійних перетворень.

Нехай $AX = \mu X \ \Leftrightarrow \ (A - \mu E)X$, тоді, згідно з теоремою 6.1, $det(A - \mu E) = 0$.

Визначення 6.4. *Поліном $det(A - \mu E)$ називається характеристичним для лінійного перетворення A.*

Надалі ми розглядаємо лінійні перетворення такі, що всі корені їх характеристичного поліному є дійсними.

Зауваження 6.2 (для тих, хто знає комплексні числа і основну теорему алгебри). *Всі доведення щодо структури лінійного перетворення та вигляду його матриці при умові дійсності коренів характеристичного поліному остаються вірними в загальному випадку в комплексному лінійному просторі $\mathbb{C}^n$, але при цьому існують рівно n власних значень з урахуванням кратних коренів.*

§7. Структура лінійного перетворення.

Визначення 7.1. *Кореневим вектором лінійного перетворення $A: V \to V$ називається вектор $X \in V$, такий, що $\exists k \in \mathbb{N} \ (A - \mu E)^k X = 0$.*

Зауваження 7.1. *У визначенні 7.1 число μ є власним значенням перетворення A, оскільки $det(A-\mu E)=0 \Leftrightarrow det((A-\mu E)^k)=0$.*

Визначення 7.2. *Кореневим простором, відповідним власному значенню μ називається $Ker(A-\mu E)^k$.*

Визначення 7.3. *Простір V називається сумою $V=U_1+U_2$ підпросторів U_1, U_2, якщо любий вектор простору V представляється, як сума векторів U_1 і U_2.*

Простір V називається прямою сумою $V=U_1 \oplus U_2$ підпросторів U_1, U_2, якщо любий вектор простору V однозначно представляється, як сума векторів U_1 і U_2.

Твердження 7.1. *Підпростори $U_1+U_2=V$ утворюють пряму суму, якщо і тільки якщо мають тільки нульовий спільний вектор.*

Доведення. Якщо $x \in U_1, U_2$, то нульовий вектор має два подання: $0=0+0, 0=x+(-x)$. Якщо $x_1+x_2=y_1+y_2$, $x_i, y_i \in U_i$, *то вектор* $x_1-y_1=y_2-x_2$ належить обом підпросторам.

Твердження 7.2. *Кореневий простір $U_\mu=Ker(A-\mu E)^k$ є інваріантним простором для перетворення $A-\lambda E$ для довільного λ.*

Доведення. Нехай $(A-\mu E)^k X=0$, тоді

$$(A-\mu E)^k\big((A-\lambda E)X\big)=(A-\lambda E)\,(A-\mu E)^k X=0.$$

Твердження 7.3. *Кореневі підпростори з різними власними значеннями не мають спільних ненульових векторів.*

Доведення. Нехай $X \in U_\mu, U_\lambda$, тобто $(A-\mu E)^k X=0$ і водночас $(A-\lambda E)^l X=0$. Вважаємо, що $Y=(A-\mu E)^{k-1}X \neq 0$, тоді $(A-\mu E)Y=0 \Leftrightarrow AY=\mu Y$ і

$$(A-\lambda E)^l Y=(A-\lambda E)^l\,(A-\mu E)^{k-1}X=(A-\mu E)^{k-1}\,(A-\lambda E)^l X=0,$$

Але, в той же час, $(A-\lambda E)^l Y=(\mu-\lambda)^l Y$, тому що

$$(A-\lambda E)^{l-1}(A-\lambda E)Y=(A-\lambda E)^{l-1}(\mu-\lambda)Y.$$

Твердження 7.3. *Всі кореневі підпростори лінійного перетворення простору V утворюють пряму суму цього простору.*

Доведення. Оскільки всі кореневі підпростори лінійного перетворення мають тільки нульовий спільний вектор, то необхідно тільки довести, що не існує вектор, що не належить $U_{\mu_1} \oplus \dots \oplus U_{\mu_r}$. Якщо це так, то простір $\{ (A-\mu_1 E)^{k_1} \dots (A-\mu_r E)^{k_r} V\}$ є інваріантним для перетворення А. Але в ньому повинен існувати власний вектор з власним значенням, відмінним від $k_1, \dots, k_r$, що неможливо.

Отримаємо найпростіший вигляд матриці лінійного перетворення у кореневому просторі U_μ.

Нехай кореневий вектор X такий, що $(A-\mu E)^k X = 0$ і k- максимально можливе. Тоді вектори $\{ e_r = (A-\mu E)^{r-1}X, r = 1, \dots, k \}$ задають підпростір J_1 і задовольняють співвідношенням:

$$(A-\mu E)e_r = e_{r+1} \Leftrightarrow Ae_r = \mu e_r + e_{r+1},$$

отже матриця A в базисі $\{e_r, r = 1, \dots, k \}$ має вигляд і називається клітиною *Жордана*:

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, e_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо підпростір J_X не вичерпує весь кореневий підпростір, то знайдеться вектор Y, що при деякому значенні l вектор $(A-\mu E)^l Y$ буде належати J_X, у тому числі він може бути нульовим. В останньому випадку підпростори J_X, J_Y утворюють пряму суму.

Якщо $0 \neq (A-\mu E)^l Y \in J_X$, то

$$(A-\mu E)^l Y = \sum_{r=l}^{k} \alpha_r \, (A-\mu E)^{r-1} X.$$

В останній сумі r не може бути менше, ніж l, тому що тоді $Y = (A-\mu E)^s X, s > 0$, а це неможливо.

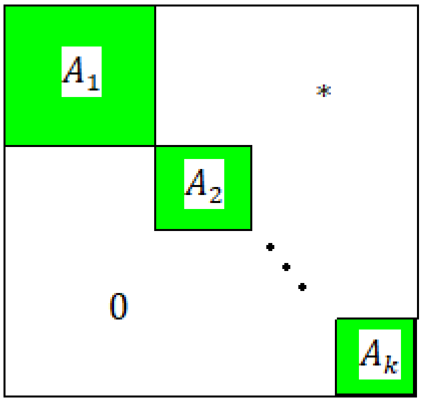
Беремо вектори

$$\left\{ (A-\mu E)^t Z, \qquad Z = Y - \sum_{r=0}^{k-l} \alpha_r \, (A-\mu E)^{r-1} X \right\}$$

і отримуємо підпростір J_Z, який разом із J_X утворює пряму суму. Діючи так і далі, весь кореневий підпростір представляємо як пряму суму інваріантних підпросторів, в кожному з яких матриця лінійного перетворення має вигляд клітинок Жордана.

Отже доведена

Теорема 7.1. *Кожне лінійне перетворення в дійсному векторному просторі при умові, що всі корені характеристичного поліному є дійсними, у спеціальному базисі має вигляд:*



кожна клітина A_i якого є клітиною Жордана.

§8. Евклідовий простір.

Визначення 8.1. *Лінійний простір* E *називається евклідовим, якщо в ньому визначений скалярний добуток* $(*,*) : E \times E \to \mathbb{R}$, *який задовольняє наступним умовам:*

(а) $(x,x) \geq 0,\ (x,x) = 0 \iff x = 0$;

(б) $(x,y) = (y,x)$;

(в) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$.

Приклад 8.1. *Канонічний скалярний добуток в* $\mathbb{R}^n$:

$$\big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Приклад 8.2. *Скалярний добуток в просторі неперервних функцій на відрізку* $[a, b]$ *можливо задати за формулою:*

$$\big(f(x), g(x)\big) = \int_a^b f(x)dx.$$

Визначення 8.2. *Множина X називається метричним простором, якщо на ньому визначена функція відстані* $\rho: X \times X \to [0, +\infty)$ *і при цьому виконані умови:*

(а) $\rho(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow x = y$;

(б) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(в) $\rho(x, y) \leq \; \rho(x, z) + \; \rho(y, z)$.

Теорема 8.1. *Евклідовий простір стає метричним, якщо відстань між векторами (кінцями векторів)* x, y *визначити по формулі:*

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}.$$

Доведення. Пункти (а) і (б) теореми безпосередньо витікають з визначення відстані.

(в) $(\alpha x - y, \alpha x - y) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha^2(x, x) - 2\alpha(x, y) + (y, y) \geq 0$,

отже $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$. – нерівність *Коші – Буняковського*. Необхідно довести, що

$$\sqrt{(x - y, x - y)} \leq \sqrt{(x - z, x - z)} + \sqrt{(z - y, z - y)}.$$

Позначимо $a = x - z, b = z - y$.

$$\sqrt{(a + b, a + b)} \leq \sqrt{(a, a)} + \sqrt{(b, b)} \;\Leftrightarrow$$

$$(a + b, a + b) \leq (a, a) + 2\sqrt{(a, a)(b, b)} + (b, b) \;\Leftrightarrow$$

$$(a, b) \leq \sqrt{(a, a)(b, b)},$$

що вже доведено.

Визначення 8.3. *Базис евклідового простору називається ортонормованим, якщо два довільних вектори ортогональні, тобто їх скалярний добуток дорівнює нулю, а довжини базисних векторів, тобто корінь із скалярного квадрату, дорівнює одиниці.*

Приклад 8.3. *Канонічний базис координатного простору з канонічним скалярним добутком є ортонормованим.*

Приклад 8.4. *Вектори*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{cos(3x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{sin(3x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{cos(3x)}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

лінійного простору періодичних з періодом 2π *функцій утворюють ортонормований базис із скалярним добутком прикладу 8.2.*

§9. Ортогональні перетворення.

Визначення 9.1. *Лінійне перетворення A евклідового простору називається ортогональним, якщо воно зберігає скалярний добуток, тобто:*

$$(Ax, Ay) = (x, y),$$

Матриця такого перетворення називається ортогональною.

Теорема 9.1 *Ортогональна матриця визначається властивістю* $A^T = A^{-1}$. *При цьому виконуються співвідношення:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1, \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, a_{ik} = 0.$$

Такі ж співвідношення виконуються і для рядків.

$$detA = \pm 1.$$

Доведення. Умови на елементи матриці є умови того, що канонічний ортонормований базис відображається в ортонормований.

Цей факт відображає і матричний запис.

$$1 = detE = det(AA^T) = det(A)det(A^T) = (detA)^2.$$

Зауваження 9.1. *Ортогональне перетворення зберігає об'єм з точністю до знаку, але не обов'язково зберігає орієнтацію.*

Приклад 9.1. *Ортогоналізація Грама – Шмідта.*

Нехай $e_1, \dots, e_n$ – довільний базис в евклідовому просторі. Базис залишиться базисом, якщо вектор e_2 замінити на вектор $\varepsilon_2 = e_2 + \alpha e_1$, але при цьому ми можемо забезпечити ортогональність $e_1 = \varepsilon_1$ i ε_2, підбираючи необхідне $\alpha = -\frac{(e_1, e_2)}{(e_1, e_1)}$.

Далі від вектору $\varepsilon_3 = e_3 + \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2$ вимагаємо ортогональності векторам $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, підбираючи вже α і β. Очевидно, як таким чином отримати ортогональний базис. Далі його можна нормувати і ми отримаємо ортонормований базис.

Теорема 9.2 *Нехай U – інваріантний підпростір ортогонального перетворення A. Тоді ортогональний до U простір $U^{\perp}$ є також інваріантним.*

Доведення. Нехай $(x, U) = 0$, тоді, згідно визначення ортогонального перетворення $0 = (Ax, AU) = (Ax, U)$, тобто ортогональний до простору U вектор перейшов також в ортогональний, або простір $U^{\perp}$ перейшов сам в себе.

ВСТУП В АНАЛІТИЧНУ ГЕОМЕТРІЮ

Звернемо увагу на те, що маючи структуру лінійного простору в $\mathbb{R}^2$, а також скалярний добуток, ми можемо сформулювати будь-яку теорему евклідової геометрії і доводити її, спираючись на аксіоми, сформульовані в першому параграфі лекцій по лінійній алгебрі.

В цьому є та необхідність, що навіть до сьогоднішнього дню в школах викладається геометрія на основі евклідової аксіоматики. Але аксіоми формулюються не в повному обсязі навіть із списку Евкліда при тому, що і список Евкліда сам по собі не є повним в тому сенсі, що деякі твердження вважаються очевидними і не попадають ні в список аксіом, ні в список теорем.

Це не означає, що треба якось змінювати зміст шкільної геометрії. Навпаки, її цінність як раз у тому, що вона в великій мірі спирається на наявний досвід, тобто не є формальною.

В свій час із шкільного курсу вилучили арифметику і на вряд це підвищило рівень логічного мислення учнів. Адже хоч алгебра і дає більш швидкий результат при розв'язанні задач, самий зміст розв'язання повністю зникає за алгебраїчними викладками.

Отже, непогано починати з геометрії Евкліда, але в свій час потрібно на неї дивитися с точки зору Рене Декарта, який сказав, що розв'язав всі задачі геометрії і мав право це сказати. І щоб зрозуміти це, необхідно все-таки розібратись і з аксіомами, і з теоремами Евкліда на основі координатного методу, а точніше на основі аксіом евклідового простору.

§1 Евклідовий простір.

I. ***Аксіоми зв'язку.***

1. *Які б не були дві точки* A, B, *існує пряма* a, *що проходить через кожну з точок* A, B.
2. *Які б не були дві точки* A, B, *існує не більше однієї прямої, що проходить через кожну з точок* A, B.
3. *На кожній прямій лежать щонайменше дві точки. Існує три точки, що не лежать на одній прямій.*
4. *Які б не були три точки* A, B, C, *що не лежать на одній прямій, існує площина* α, *що проходить через кожну з точок* A, B, C. *На кожній площині лежить хоча б одна точка.*
5. *Які б не були три точки* A, B, C, *що не лежать на одній прямій, існує не більше однієї площини, що проходить через кожну з точок* A, B, C.
6. *Якщо дві точки* A, B *прямої* a *лежать на площині* α, *то кожна точка прямої* a *лежать на площині* α.
7. *Якщо дві площини* α, β *мають спільну точку* A, *то вони мають ще якнайменше ще одну спільну точку* B.
8. *Існують щонайменше чотири точки, що не лежать в одній площині.*

II. ***Аксіоми порядку.***

1. *Якщо точка* B *лежить між точками* A, C, *то* A, B, C – *різні точки однієї прямої і точка* B *лежить між точками* C, A.
2. *Які б не були точки* A, C, *існує щонайменше одна точка* B *на прямій* AC *така, що* C *лежить між* A *і* B.
3. *Серед любих трьох точок прямої існує не більш однієї точки, що лежить між двома другими.*

4. *(аксіома Паша) Нехай* A, B, C *– різні точки, що не лежать на одній прямій, і* a *– пряма, що не містить у собі точок* A, B, C. *Тоді, якщо пряма* a *проходить через точку відрізка* AB, *то вона проходить також через точку відрізка* AC, *або через точку відрізка* BC.

III. ***Аксіоми конгруентності (≡).***

1. *Якщо дві точки* A, B *прямої* a *і* A' *– точка на тій же прямій або на другій прямій* a', *то завжди можна знайти по вказану від точки* A' *сторону на прямій* a' *одні і тільки одну точку* B', *таку, що відрізки* AB *і* $A'B'$ *конгруентні.*
2. $A'B' \equiv AB, A''B'' \equiv AB \Rightarrow A'B' \equiv A''B''$.
3. *Нехай* AB, BC *– відрізки на прямій* a, *що не мають внутрішніх спільних точок, нехай також* $A'B', B'C'$ *– відрізки на прямій* a', *що теж не мають спільних внутрішніх точок. Якщо при цьому* $A'B' \equiv AB, B'C' \equiv BC$, *то* $A'C' \equiv AC$.
4. *Кожний кут може бути однозначно відкладений в даній площині по дану сторону при даному промені. Кожен кут конгруентний самому собі.*
5. *Якщо* $A'B' \equiv AB, B'C' \equiv BC, \angle ABC = \angle A'B'C'$, *то* $\angle ACB = \angle A'C'B', \angle BAC = \angle B'A'C'$.

IV. ***Аксіоми неперервності.***

1. *(аксіома Архімеда) Нехай* AB, CD *– довільні відрізки. Тоді на прямій* AB *існує скінченна кількість точок* $A_1, A_2, \dots, A_n$, *розташованих так, що точка* A_1 *лежить між* A *і* A_2, *точка* A_2 *лежить між* A *і* A_3 *, і т. д., причому відрізки* $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ *конгруентні відрізку* CD *і* B *лежить між* A *і* A_n.
2. *(аксіома Кантора) Кожна вкладена система відрізків має спільну точку.*

V. ***Аксіома паралельності.***

1. *Нехай* a *– довільна пряма і* A *– точка, що не лежить на цій прямій; тоді в площині, яка містить в собі пряму* a *і точку* A*, можливо провести не більше однієї прямої через точку* A*, яка б не перетинала пряму* a*.*

Система аксіом взята з книги Н.В. Єфімов «Вища геометрія».

Як бачимо, правильна система аксіом Евкліда хоч наочно і очевидна, але вимушує описувати купу геометричних властивостей, пов'язаних з взаємовідношенням геометричних об'єктів і вкрай не пристосована до узагальнень. Наочна геометрична очевидність безумовно зникає, якщо необхідно описати об'єкт, який важко уявити, наприклад, чотиривимірний простір разом з геометричними об'єктами. Але навіть на площині важко уявити все, що описано у V постулаті, адже він вимушує стверджувати про те, що відбувається в нескінченності. Не дивно, що цей постулат приніс з собою велику проблему.

А з іншої сторони. Дуже проста ідея: ввести координати на площині. І, очевидно, революційна. І, очевидно, геніальна, як це і повинно бути.

Отже, щоб привести шкільні знання до строгої системи, необхідно спочатку упевнитись, що всі аксіоми евклідової геометрії виконуються в термінах лінійного простору разом з поняттям довжині, за що відповідає скалярний добуток, і з поняттям конгруентності, за що відповідають ортогональні перетворення разом з паралельним перенесенням на заданий вектор.

§2 Вибрані теореми планіметрії і стереометрії.

Цілий ряд початкових теорем евклідової геометрії з точки зору аналітичної, як і більшість аксіом, є очевидними. Знаменита теорема Піфагора стає просто визначенням довжини для довільного відрізка на площині.

Крім того, основними даними евклідової геометрії є довжини і кути, а аналітичної – координати, що робить цілий ряд теорем зручними для однієї геометрії і, навпаки, для другої. Наприклад, теорема Герона для знаходження площі трикутника через довжини сторін зовсім не цікава, коли трикутник задається координатами сторін або рівняннями для сторін. Дивлячись на це, доведемо ті теореми евклідової геометрії, які і змістовні, і неочевидні.

Позначення 2.1. *Кут між векторами* a, b *будемо позначати* $\angle(a, b)$, *довжину вектору* a – $|a| = \sqrt{(a, a)}$.

***Визначення 2**.1.*

$$cos\angle(a, b) = \frac{(a, b)}{|a||b|}.$$

Згідно з нерівністю Коші – Буняковського $|cos\angle(a, b)| \leq 1$.

Теорема 2.1 (косинусів). *Якщо кут* α *лежить навпроти сторони* a *трикутника з сторонами* a, b, c, *то*

$$a^2 = b^2 - 2bc\ cos(\alpha) + c^2.$$

Доведення.

$$b - c = a,$$

$$(b - c, b - c) = (a, a),$$

$$|b|^2 - 2(b, c) + |c|^2 = |a|^2.$$

Теорема 2.2 (площа трикутника). *Якщо кут* α *лежить навпроти сторони* c *трикутника з сторонами* a, b, c, *то площа трикутника дорівнює*

$$S = \frac{1}{2}|a||b|sin(\alpha).$$

Доведення. Розташуємо вектор a на осі абсцис.

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} |a| & 0 \\ (b, e_1) & (b, e_2) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|a||b|\ cos\angle(b, e_2) =$$

$$\frac{1}{2}|a||b|\ cos\left(\frac{\pi}{2} - \angle(b, e_1)\right) = \frac{1}{2}|a||b|\ cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Теорема 2.3 (про медіани трикутника). *Медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться перетином в відношенні 2:1, рахуючи від вершини.*

Доведення. Теорема є очевидною для правильного трикутника. Існує лінійне перетворення, яке вершини правильного трикутника відображає в довільні. При цьому відношення довжин зберігається.

Теорема 2.4 (про висоти трикутника). *Висоти трикутника перетинаються в одній точці.*

Доведення. Довільний трикутник можливо розташувати, щоб координати були такими: $A(a,0), B(0,b), C(c,0)$. Бокові сторони задаються рівняннями:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad \frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1,$$

отже висоти, що перпендикулярні сторонам і містять в собі точки $A(a,0), B(0,b)$ відповідно задаються рівняннями:

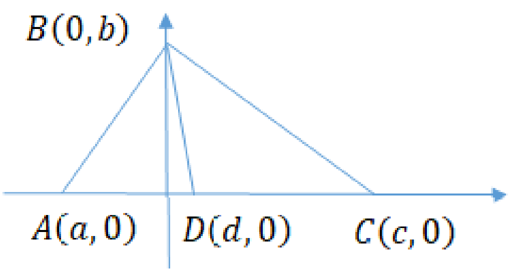
$$ax-by=ac, cx-by=ac.$$

Абсциса точки перетину цих прямих дорівнює 0.

Доведення наступної теореми показує дуже важливу роль вірного вибору координат.

Теорема 2.5 (про бісектрису трикутника). *Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону у відношенні довжин прилеглих сторін.*

Доведення. Варіант 1.



Умова, що BD є бісектриса:

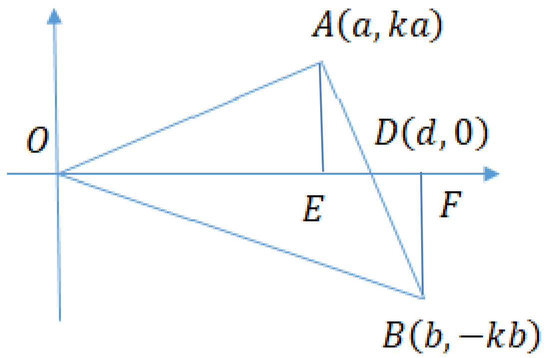
$$\frac{\big((a,-b),(d,-b)\big)}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\big((c,-b),(d,-b)\big)}{\sqrt{c^2+b^2}},$$

$$\frac{ad+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{cd+b^2}{\sqrt{c^2+b^2}}.$$

Необхідно довести, що

$$\frac{d-a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{c-d}{\sqrt{c^2+b^2}}.$$

Доведення. Варіант 2.



Вісь абсцис – бісектриса. Необхідно довести, що

$$\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{|AD|}{|BD|},$$

або

$$\frac{a}{b}=\frac{d-a}{b-d},$$

що витікає з подібності трикутників ADE, BDF.

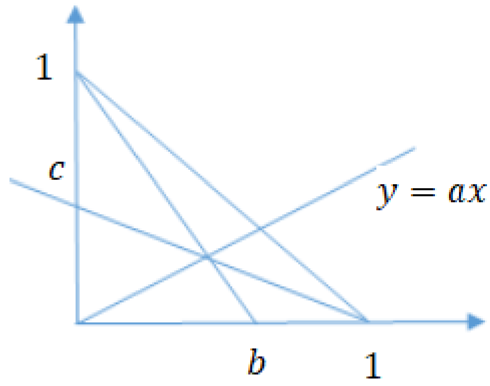
Очевидно, другий варіант доведення набагато легший.

Теорема 2.6 (Чеви). *Нехай точки A_1, B_1, C_1 лежать на сторонах BC, CA, AB відповідно. Тоді якщо і тільки якщо*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

то прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці.

Доведення. Оскільки всі співвідношення теореми зберігаються при лінійних перетвореннях, то доводимо теорему для зручного трикутника.



Рівняння прямих:

$$y = ax, \qquad \frac{x}{b} + y = 1, \quad x + \frac{y}{c} = 1.$$

Позбавляємся y:

$$\left(\frac{1}{b} + a\right)x = 1, \quad \left(1 + \frac{a}{c}\right)x = 1.$$

Позбавляємся x:

$$(1 + ab)c = (c + a)b.$$

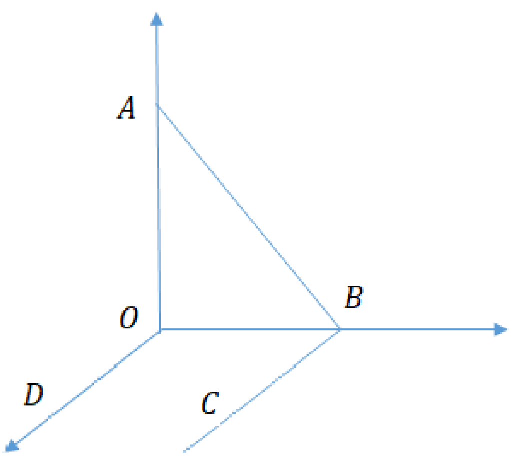
Співвідношення для відрізків, починаючи з гіпотенузи проти часової стрілки:

$$a \cdot \frac{1-c}{c} \cdot \frac{b}{1-b} = 1 \iff ab(1-c) = c(1-b),$$

як бачимо, теж саме.

Неможливо заперечити, що наглядне уявлення при доведенні теорем стереометрії стає суттєво складнішим, а іноді і вкрай складним. В той же час метод аналітичної геометрії майже не ускладнюється. Наприклад,

Теорема (про три перпендикуляри) 2.7.



Нехай $AO \perp OD, OB$*. Тоді* $AB \perp BC \iff OC \perp BC$.

Доведення. Осі координат вибираємо в ортонормованому базисі , щоб $AO = \alpha e_3, BC \parallel e_1 \iff BC = \beta e_1, OB = \gamma e_2$.

Необхідно довести, в координатах, що $(\alpha e_3 + \gamma e_2, \beta e_1) = 0$.

Це очевидно.

В іншу сторону. Доведення від протилежного. Нехай $(e_1, e_3) = (e_2, e_3) = 0, (e_1, e_2) \neq 0$. Тоді $(AB, e_2) \neq 0$.

Приклад 2.1. *Відстань від точки* (x_0, y_0, z_0) *до площини* $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ *в просторі.*

Рівняння нормалі $(\alpha, \beta, \gamma), \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, до площини:

$$x(t) = x_0 + \alpha t, y(t) = y_0 + \beta t, z(t) = z_0 + \gamma t.$$

Точка перетину нормалі з площиною:

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta + t = 0$$

Відстань дорівнює t, тобто

$$\rho = |\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta|.$$

Якщо вектор нормалі не нормований, то

$$\rho = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Приклад 2.2. *Відстань від точки* (x_0, y_0, z_0) *до прямої*

$\alpha x + \beta y + \delta = 0$ *в просторі.* В отриманій формулі беремо $\gamma = 0$:

$$\rho = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Приклад 2.2. *Дана правильна чотирикутна піраміда* $MABCD$*, всі ребра якої дорівнюють 12. Точка* N *– середина* MA*, точка* K *ділить* MB *в відношенні 2:1, рахуючи від вершини* M.

Доведіть, що переріз через точки N, K *паралельно* AD *є рівнобічна трапеція і знайдіть її площину.*

Розв'язання. Виберемо систему координат так, щоб $M(0,0,h), A(a,0,0), B(0,a,0), C(-a,0,0), D(0,-a,0)$. Тоді

$$N\left(\frac{a}{2},0,\frac{h}{2}\right), K\left(0,\frac{2a}{3},\frac{h}{3}\right),$$

а коефіцієнти площі перерізу $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ задовольняють системі:$\begin{cases} \alpha a+h\gamma+2\delta=0,\\ 2a\beta+h\gamma+3\delta=0,\\ \alpha+\beta=0,\end{cases}$

отже, рівняння площини: $(x-y+3a)h=7az$.

Рівняння бокових ребер:

$$MC: (-at,0,(1-t)h), MD: (0,-at,(1-t)h).$$

Точки перетину ребер з перерізом:

$$N\left(\frac{a}{2},0,\frac{h}{2}\right), K\left(0,\frac{2a}{3},\frac{h}{3}\right),$$

$$(-at+3a)h=7a(1-t)h \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}, \qquad E\left(\frac{-2a}{3},0,\frac{h}{3}\right),$$

$$(at+3a)h=7a(1-t)h \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}, \qquad F\left(0,\frac{-a}{2},\frac{h}{2}\right).$$

Бачимо, що $NF \parallel KE$. Площа трапеції дорівнює

$$\frac{1}{2}(|NF|+|KE|)\,\rho(N,KE)=\frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}+\frac{2a\sqrt{2}}{3}\right)\rho(N,KE)=\frac{7a\sqrt{2}}{12}\rho(N,KE).$$

Найкоротша відстань від точки $N\left(\frac{a}{2},0,\frac{h}{2}\right)$ до точок $(x,x,0)$ є $\frac{\sqrt{2a^2+4h^2}}{4}$.

§3 Криві і поверхні другого порядку.

Після вивчення властивостей лінійних просторів, лінійних функцій і лінійних перетворень природно перейти до вивчення нелінійних об'єктів. Отже, почнемо вивчати множини, які задаються квадратичними функціями.

В $\mathbb{R}^2$:

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+b_1x+b_2y+c=0.$$

В $\mathbb{R}^3$:

$$F(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yx+ b_1x+b_2y+b_3z+c=0.$$

Або в матричному вигляді для довільної розмірності:

$$F(X) = X^T AX + BX + c = 0, \qquad A^T = A.$$

Необхідно зробити лінійну змінних, щоб квадратична частина $X^T AX$ нашої функції прийняла найбільш простий вигляд, але для цього треба виявити деякі властивості функції $F(X)$ в зв'язку з матрицею A.

При заміні змінних $X = HX_1$ функція $X^T AX$ не повинна змінитися, тобто, $X^T AX = (HX_1)^T AHX_1 = X_1{}^T H^T AHX_1 = X_1{}^T (H^T AH) X_1$ матриця A заміняється на $H^T AH$. Якщо ми бажаємо, також, не деформувати поверхню або криву, то матриця H повинна бути ортогональною, тобто $H^T = H^{-1}$. В такому випадку матриця A при заміні на $H^T AH = H^{-1}AH$ трансформується тим же чином, що і лінійне перетворення з матрицею A. Оскільки для лінійних перетворень ми вже маємо метод для приведення до канонічного вигляду, то можемо його застосувати. Для цього необхідно знайти власні вектори, якщо вони існують.

Теорема 3.1. *Нехай функція $X^T AX$ досягає максимуму або мінімуму на сфері $|X| = 1$. Тоді вектор X є власним для лінійного перетворення, що задає матриця A.*

Доведення. Обчислімо лінійне прирощення функції $X^T AX$ в напряму $h \perp X$.

$$(X + h)^T A(X + h) = X^T AX + X^T Ah + h^T AX + h^T Ah.$$

Оскільки вираз $h^T AX$ є число, то, враховуючи $(AB)^T = B^T A^T$,

$$X^T Ah = (X^T Ah)^T = h^T AX$$

і тоді лінійне прирощення дорівнює $2h^T(AX) = 2(AX, h)$.

Воно повинно дорівнювати нулю, тобто $AX \perp h$ для будь-якого $h \perp X$, отже $AX \parallel X$.

Теорема 3.2. *Нехай функція $F(X)$ є неперервною на сфері $|X| = 1$. Тоді вона обмежена і досягає максимуму і мінімуму.*

Доведення повторює доведення теореми про неперервну функцію задану на відрізку.

Теорема 3.3. *Нехай лінійне перетворення A в евклідовому просторі має симетричну матрицю $A^T = A$, або, що теж саме:*

$$\forall X, Y \ (X, AY) = (AX, Y).$$

Тоді, якщо U є інваріантний простір, тобто $AU \subset U$, то те ж вірно для ортогонального до U простору $U^{\perp}$.

Доведення. Нехай $X \in U^{\perp}$, тоді

$$(AX, U) = (X, AU) = 0.$$

Теорема 3.4. *Лінійне перетворення A з симетричною матрицею має ортонормований власний базис.*

Доведення. В точці X, де функція $X^T AX$ досягає максимуму або мінімуму $AX = \mu X$, отже простір $\{X\}$ є інваріантним. Далі розглядаємо ту ж функцію на просторі $\{X\}^{\perp}$.

Наслідок 3.1. *Існує лінійне ортогональне перетворення, в наслідок якого матриця квадратичної функції $X^T AX$ стає діагональною.*

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ii} x_i^2 + b_i x_i \right) + c = 0.$$

$$F(X) = a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + b_1 x + b_2 y + c = 0.$$

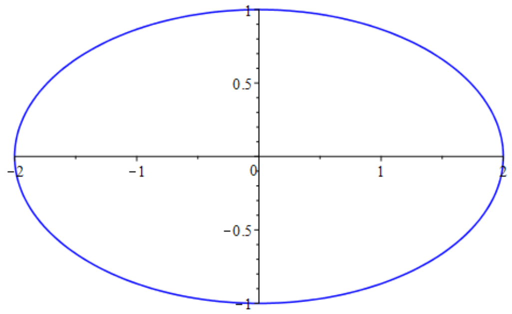
$$a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0.$$

$$F(X) = a_{11} \left(x + \frac{b_1}{2a_{11}} \right)^2 + a_{22} \left(y + \frac{b_2}{2a_{22}} \right)^2 - \frac{b_1^2}{4a_{11}} - \frac{b_2^2}{4a_{22}} + c = 0,$$

$$F(X) = a_{11} x_1^2 + a_{22} y_1^2 + c_1 = 0.$$

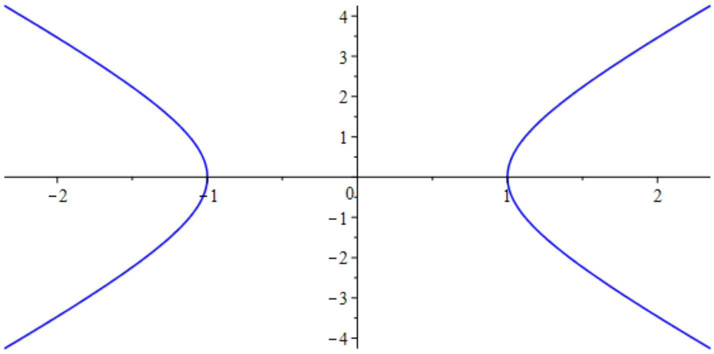
$$a_{11} > 0, a_{22} > 0, c_1 < 0.$$

Еліпс.



$$a_{11} > 0, a_{22} < 0, c_1 < 0.$$

Гіпербола.



$$a_{11} > 0, a_{22} > 0, c_1 = 0.$$

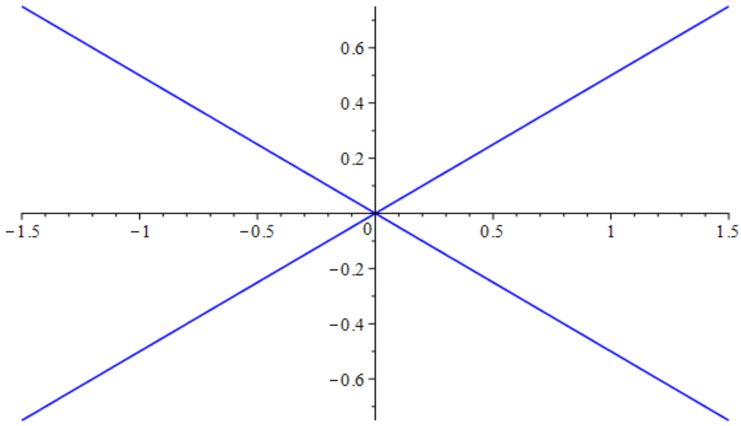
Одна точка: $x = 0, y = 0.$

$$a_{11} > 0, a_{22} > 0, c_1 > 0.$$

Пуста множина.

$$a_{11} > 0, a_{22} < 0, c_1 = 0.$$

Дві прямі, які перетинаються.



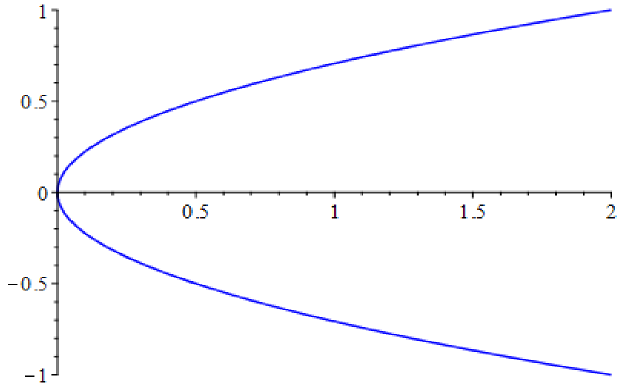
$$a_{11} = 0, a_{22} \neq 0, b_1 \neq 0.$$

Парабола.

$$F(X) = a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0.$$

$$F(X) = \left(y + \frac{b_2}{2a_{22}}\right)^2 + \frac{b_1}{a_{22}}\left(x + \frac{c}{b_1} - \frac{b_2^2}{4a_{22}b_1}\right) = 0.$$

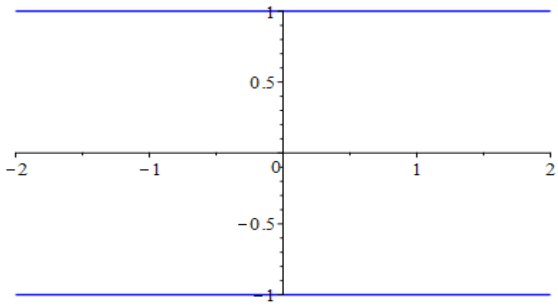
$$F(X) = y_1^2 - 2px_1 = 0.$$



$$a_{11} = 0, a_{22} \neq 0, b_1 = 0.$$

$$F(X) = a_{22}y^2 + b_2 y + c = 0.$$

Дві паралельні прямі або співпадаючі або пуста множина.



$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + c = 0.$$

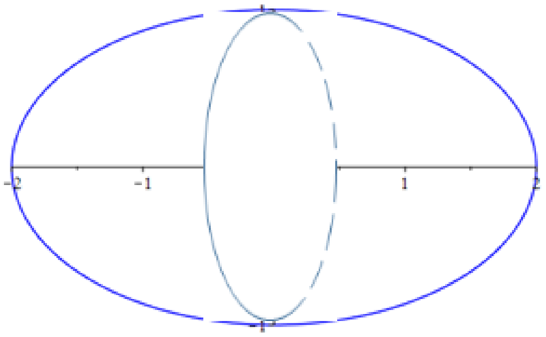
Діємо, як і в випадку розмірності 2.

$$a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0\ .$$

$$F(X) = a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + a_{33}z_1^2 + c_1 = 0.$$

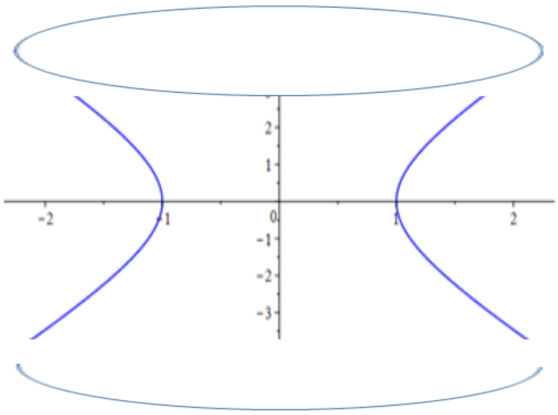
$$a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} > 0, c_1 < 0.$$

Еліпсоїд. Можна отримати еліпса обертанням навколо осі x з наступним розтягуванням або стисненням по осі z.



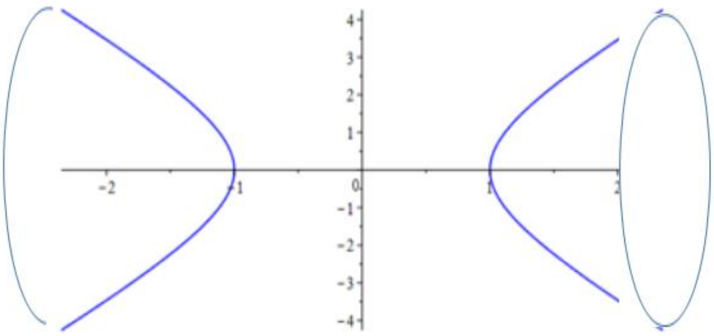
$$a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} < 0, c_1 < 0.$$

Однополий гіперболоїд. Можна отримати гіперболи обертанням навколо осі y *з наступним розтягуванням або стисненням по осі* z.



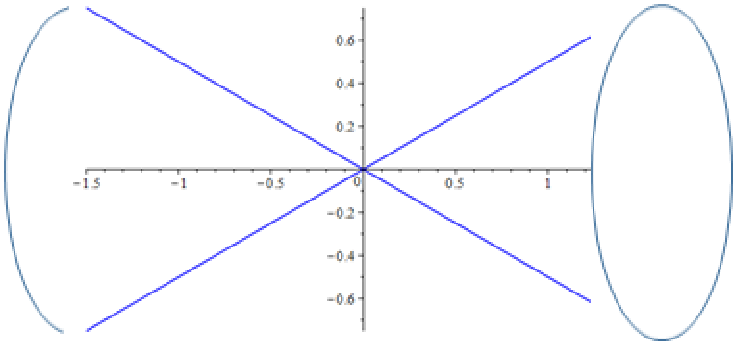
$$a_{11} > 0, a_{22} < 0, a_{33} < 0, c_1 > 0.$$

Двополий гіперболоїд. Можна отримати обертанням гіперболи навколо осі x *з наступним розтягуванням або стисненням по осі* z.



$$a_{11} > 0, a_{22} < 0, a_{33} < 0, c_1 = 0.$$

Конус. Можна отримати обертанням прямих, що перетинаються, навколо осі x *з наступним розтягуванням або стисненням по осі* z.



$$a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} > 0, c_1 = 0.$$

Точка $x = y = z = 0$.

$$a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} > 0, c_1 > 0.$$

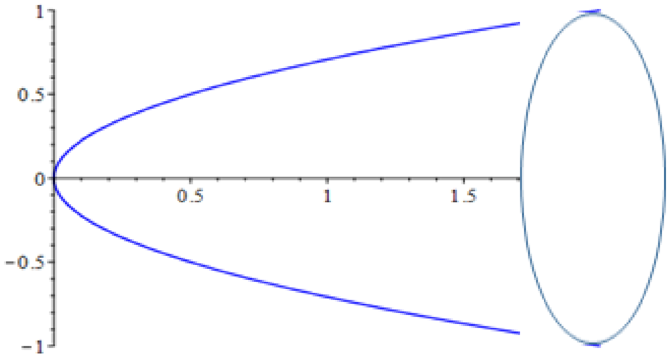
Пуста множина.

$$a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} = 0, b_3 \neq 0.$$

$$F(X) = a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + b_3 z_1 + c_1 = 0.$$

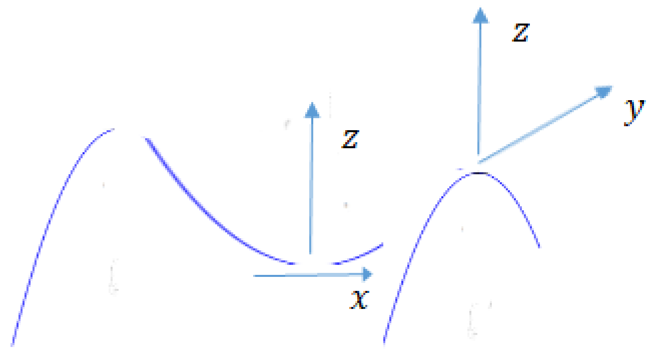
$$a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} = 0, b_3 < 0.$$

Еліптичний параболоїд. Можна отримати обертанням параболи навколо осі x *з наступним розтягуванням або стисненням по осі* z.



$$a_{11} > 0, a_{22} < 0, a_{33} = 0, b_3 < 0.$$

Гиперболічний параболоїд. Можна отримати протягненням параболи $a_{22}y_1^2 + b_3z_1 + c_1 = 0, x_1 = 0,$ *вздовж параболи* $a_{11}x_1^2 + b_3z_1 + c_1 = 0, y_1 = 0,$ *з наступним розтягуванням або стисненням по осі* z.



$$a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} = 0, b_3 = 0, c_1 = 0.$$

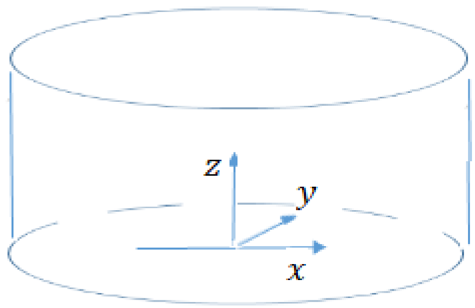
Вісь z.

$$a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} = 0, b_3 = 0, c_1 > 0.$$

Пуста множина.

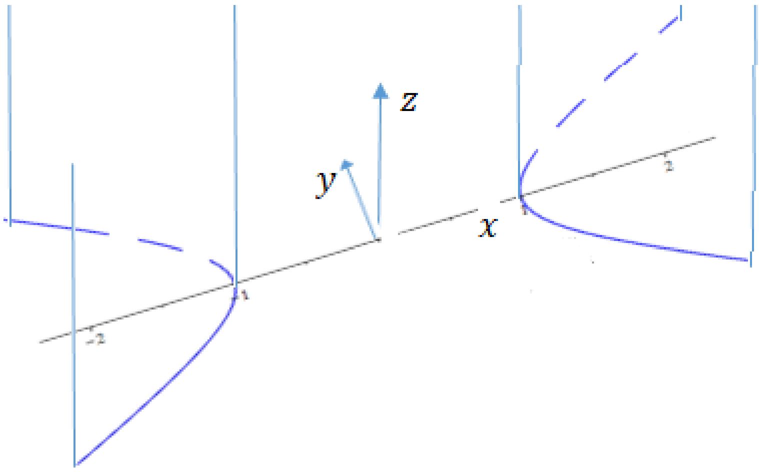
$$a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} = 0, b_3 = 0, c_1 < 0.$$

Еліптичний циліндр. Можна отримати протягненням еліпсу вздовж осі z.



$$a_{11} > 0, a_{22} < 0, a_{33} = 0, b_3 = 0, c_1 < 0.$$

Гіперболічний циліндр. Можна отримати протягненням гіперболи вздовж осі z.



$$a_{11} > 0, a_{22} < 0, a_{33} = 0, b_3 = 0, c_1 = 0.$$

Дві площини, які перетинаються.

$$a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} = 0, b_3 = 0, c_1 = 0.$$

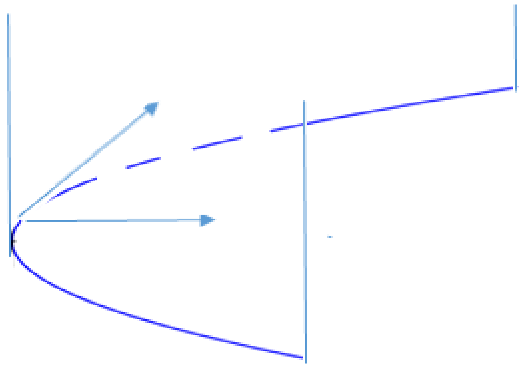
Вісь z.

$$a_{11} > 0, a_{22} > 0, a_{33} = 0, b_3 = 0, c_1 > 0.$$

Пуста множина.

$$a_{11} = 0, a_{22} > 0, a_{33} = 0, b_1^2 + b_3^2 \neq 0.$$

Параболічний циліндр. Можна отримати протягненням параболи вздовж осі z



$$a_{11} = 0, a_{22} > 0, a_{33} = 0, b_1^2 + b_3^2 = 0, c_1 \leq 0.$$

Дві паралельні або співпадаючі площини.

$$a_{11} = 0, a_{22} > 0, a_{33} = 0, b_1^2 + b_3^2 = 0, c_1 > 0.$$

Пуста множина.

§4. Векторний добуток. Алгебри Лі.

Визначення 4.1. *Векторним добутком в тривимірному евклідовому просторі називається відображення, яке співставляє впорядкованій парі векторів* (x, y)*, ортогональний їм вектор* z*, довжина якого дорівнює площі паралелограму, що визначають вектори* x, y*, а напрям вибирається таким, що вектори* (x, y, z) *мають позитивну орієнтацію.*

Зауваження 4.1. *Визначення є коректним у випадку, коли вектори* x, y *пропорційні, тому що тоді їх векторний добуток дорівнює нулю і питання орієнтації вже не стоїть.*

Позначення 4.1. *Для векторного добутку векторів* x, y*, як правило, використовуються позначення:* $x \times y$ *або* $[x, y]$.

Твердження 4.1.

(а) $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_2, e_3] = e_1,\ [e_3, e_1] = e_2$.

(б) Векторний добуток є білінійна вектор-функція.

(в) $[x, y] = -[x, y]$.

(г) $\big[[x, y], z\big] = (x, z)y - (y, z)x$.

(д) Тотожність Якобі: $\big[[x, y], z\big] + \big[[y, z], x\big] + \big[[z, x], y\big] = 0$.

Доведення.

(а) Білінійність витікає з білінійності функції площі.

(б) Кососиметричність також витікає з кососиметричності функції площі.

(в) Достатньо перевірити на векторах базису.

Тотожність виконується, якщо вектори x, y, z дорівнюють e_1, e_2, e_3, взятих у довільному порядку, або одному і тому ж вектору.

Без обмеження загальності можна вважати $z = e_1$:

$$\left[[x, y], e_1\right] = (x, e_1)y - (y, e_1)x.$$

Тотожність вірна, якщо $x = y$. Тотожність кососиметрична по x, y.

Остається переконатися, що вірно

$$\left[[e_1, e_2], e_1\right] = (e_1, e_1)e_2 - (e_2, e_1)e_1,$$

$$\left[[e_1, e_3], e_1\right] = (e_1, e_1)e_3 - (e_3, e_1)e_1.$$

(г) Скористатися пунктом (в).

Твердження 4.2. В канонічному евклідовому базисі

(а) $[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_3)$.

(б) $\left([(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)], (z_1, z_2, z_3)\right) = det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$.

Доведення. *(а)* Розписати вектори по базису і скористатися пунктом (а) твердження 4.1.

(б) Об'єм паралелепіпеду дорівнює добутку площі основи на висоту.

Твердження 4.3. *Ортогональні матриці задовольняють умовам:*

(а) Одинична матриця є ортогональною.

(б) Довільна ортогональна матриця має обернену.

(в) Операція множення ортогональних матриць є асоціативною.

Доведення. *Всі пункти є прямим слідством того, що ортогональна матриця задає лінійне перетворення, яке зберігає всі відстані і кути.*

Зауваження 4.1. *Множина з операцією множення, яка задовольняє пунктам (а),(б),(в) твердження 4.3, називається групою.*

Твердження 4.4. *Операція множення ортогональних матриць є неперервним і диференційовним відображенням, якщо вважати ортогональні матриці елементами евклідового простору* $\mathbb{R}^{n^2}$.

***Доведення** є проста перевірка визначень неперервності і диференційовності у метричному просторі.*

***Зауваження 4.2**. Група, яка задовольняє твердженню 4.3, називається групою Лі.*

***Позначення 4.1:** $So(n)$ – група Лі ортогональних матриць n-ого порядку з позитивним визначником.*

$O(n)$ – група Лі ортогональних матриць n-ого порядку.

***Твердження 4.5.** Нехай $A(t)$ – траєкторія в просторі ортогональних матриць. Тоді похідна Ω в точці $A(t) = E$ є кососиметричною матрицею, $\Omega^T = -\Omega$.*

***Доведення.** $A(t)A(t)^{\,T} \equiv E$, отже в точці E*

$$\frac{d}{dt}\big(A(t)\big)A(t)^{\,T} + A(t)\frac{d}{dt}(A(t)^T) \equiv 0 \implies$$

$$(E + \Omega t + \alpha t)A(t)^{\,T} + A(t)(E + \Omega t + \alpha t)^T - E \equiv 0$$

і в точці E:

$$(\Omega + \Omega^T)t + (\alpha + \alpha^T)t \equiv 0 \implies \Omega + \Omega^T = 0.$$

***Теорема 4.1.** Похідна від перетворення $(A, B) \to ABA^{-1}B^{-1}$, в точці E, де A, B- ортогональні матриці є:*

$$(\Omega, \Psi) \to \Omega\Psi - \Psi\Omega.$$

***Позначення 4.2:** $\Omega\Psi - \Psi\Omega = [\Omega, \Psi]$.*

Доведення.

$$(E + \Omega t + \alpha t)(E + \Psi t + \beta t)(E - \Omega t + \alpha^T t)(E - \Psi t + \beta^T t) - E =$$

$$(\Omega\Psi - \Psi\Omega)t + \cdots$$

Теорема 4.2.

(а) Операція $(\Omega, \Psi) \to \Omega\Psi - \Psi\Omega$ є білінійна матрична функція.

(б) $[\Omega, \Psi] = -[\Psi, \Omega]$.

(в) Тотожність Якобі: $\big[[\Omega, \Psi], \Theta\big] + \big[[\Psi, \Theta], \Omega\big] + \big[[\Theta, \Omega], \Psi\big] = 0$.

Доведення – проста перевірка.

Зауваження 4.2.*Лінійний простір, в якому визначена операція з умовами теорем 4.2, називається алгеброю Лі.*

Позначення 4.3: $so(n)$ – *алгебра Лі ортогональних матриць* n-*ого порядку з позитивним визначником.*

Теорема 4.3. Векторний добуток задає структуру алгебри Лі $so(3)$.

Доведення. *Візьмемо*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & -x_2 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ x_2 & -x_3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & -y_2 \\ -y_1 & 0 & y_3 \\ y_2 & -y_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переконаємся, що

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & x_2y_3 - x_3y_2 & x_1y_3 - x_3y_1 \\ -x_2y_3 + x_3y_2 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ -x_1y_3 + x_3y_1 & -x_1y_2 + x_2y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$